(19)대한민국특허청(KR)
(12) 공개특허공보(A)

(51) 。Int. Cl.7
G06F 17/13

(11) 공개번호 10-2004-0016863
(43) 공개일자 2004년02월25일

(21) 출원번호 10-2003-7014753
(22) 출원일자 2003년11월13일
번역문 제출일자 2003년11월13일
(86) 국제출원번호 PCT/JP2002/004617
(86) 국제출원출원일자 2002년05월13일
(87) 국제공개번호 WO 2002/93412
(87) 국제공개일자 2002년11월21일

(30) 우선권주장 JP-P-2001-00142949 2001년05월14일 일본(JP)

(71) 출원인
가부시끼가이샤 얼라이드 엔지니어링
일본 140-0014 도꾜도 시나가와꾸 오이 1쪼메 21반 17고

도꾸리쯔교세이호징 가가꾸 기쥬쯔 신꼬 기꼬
일본 사이따마껭 가와구찌시 혼쵸 4쵸메 1방 8고

(72) 발명자
아끼바, 히로시
일본 140-0014 도꾜도 시나가와꾸 오이 1쪼메 21반 17고 가 부시끼가이샤 얼라이드 엔지니어링 내

오야마, 도모노부
일본 140-0014 도꾜도 시나가와꾸 오이 1쪼메 21반 17고 가 부시끼가이샤 얼라이드 엔지니어링 내

스즈끼, 마사부미
일본 140-0014 도꾜도 시나가와꾸 오이 1쪼메 21반 17고 가 부시끼가이샤 얼라이드 엔지니어링 내

(74) 대리인
장수길
이중희
구영창

심사청구 : 없음

(54) 병렬 유한 요소법 계산 시스템

요약

초대규모 구조 문제를 푸는 방법으로서, 영역 분할법(**DDM**), **Neumann** 전처리된 **DDM** , **BDD** 법, 병렬 **CG** 법이 알려져 있지만, 발산해서 해가 구해지지 않기 때문에, 계산 시간이 매우 길어진다는 문제가 있다. 본 발명은 상기 문제를 해결하는 것이다.

본 발명은 자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템으로서, 영역 분할을 하는 수단, 부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배를 하는 수단, 강성 매트릭스를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단 및 변위 해를 출력하는 수단을 포함하는 것이다.

대표도

도 2

색인어

허용 변위장, 유한 차원 내적 벡터 공간, 공역 사영 구배법, 자유도, 정정치 대칭 선형 변환

명세서

기술분야

본 발명은 자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 효과적으로 해결하는, 초대규모 병렬 유한 요소법 솔브 알고리즘(solve algorithm)에 관한 것이다. 병렬 CG 알고리즘을 기반으로 하여, 영역 분할(Domain Decomposition)에 기초하는 공역 사영 구배법 알고리즘을 도입한 것이다. 해당 알고리즘을 「CGCG법」(Coarse Grid CG method, CGCG method)라 한다. K를 해당 구조 문제의 강성 행렬로 하여, 영역 분할에 의한 부분 영역 단위의 자유도의 공간을 coarse 공간, 그것에 **K**－ 직교한 보공간(complementary space)을 fine 공간이라 한다. CGCG법은 사영으로서 fine 공간으로의 **K**－ 직교 사영을 채용한 공역 사영 구배(Conjugate Projected Gradient algorithm: 이하, 사영 CG법이라 함)를 병렬 처리에 의해 행하는 것이다.

배경기술

구조 문제는 통상, 다음과 같이 취급된다. 먼저, 대상으로 되는 구조물을 연속체로서 정식화하여, 연속체의 운동 방정식(정적 문제의 경우에는 균형 방정식)을 정한다. 이 방정식은 대부분의 경우 엄밀히 푸는 것이 불가능하여, 수치 해석적으로 해석하지 않을 수 없다. 이를 위한, 연속체 문제의 이산 근사적 재정식법이 필요해진다. 그 방법 중 하나로서, 유한 요소법(일본 기계 학회 계산 역학 핸 드북 (**Ⅰ** 유한 요소법 구조편) 일본 기계 학회 1998)이 있다. 유한 요소법에서는, 먼저 연속체가 차지하는 공간 영역을 복수의 요소(유한 요소법의 요소)로 분할하여, 비제로인 값을 취하는 영역이 각 요소에 국재(局在)한 함수(형상 함수)를 도입하여, 연속체 변위장을 이들 함수의 중첩으로 표현되는 것에 한정하는 근사에 의해, 연속체의 변위장 및 그 운동 방정식(혹은, 균형 방정식)을 이산화한다. 이 이산화에 의해, 방정식은 하나(정적 선형 문제의 경우) 혹은 복수(예를 들면, 비선형 문제의 경우 증분 단계마다, 동적 문제의 경우 시간 단계마다)의 선형 방정식으로 귀착된다. 유한 요소법에 의한 연속체 영역의 요소 분할의 분할수에 의해 선형 방정식이 취급하는 자유도(차원) 수가 달라서, 일반적으로 근사를 좋게 하기 위해 분할수를 증가시키면 자유도 수는 증가하고, 대응하는 선형 방정식의 구해(救解)의 난이도가 높아진다.

미소 변형의 정적 구조 문제는 유한 요소법에서는 수학식 1과 같은, 유한 차원 내적 벡터 공간 V 상의 선형 문제로 귀착된다.

수학식 1

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$$

여기서, **V** 는 허용 변위장(변위장의 경계 조건을 만족시키는 벡터장)의 공간, **K** 는 **V** 의 차원 **dimV** 차 강성 매트릭스(stiffness matrix)(정정치(正定値) 대칭), **u** 는 **V** 의 변수 벡터, **F** 는 외력을 나타내는 <스캔; 2면 13행>의 정(定)벡터이다. **V** 의 차원 **dimV** 는 문제의 자유도 수와 동일하다. **V** 중에서 수학식 1을 만족하는 벡터 **u** 를 찾기 내는 것이 솔브의 과제가 된다.

먼저, 본 발명의 기반으로 되는 공역 사영 구배법(CPG:Conjugate Projected Gradient Algorithm : C.Farhat F. – X. Roux : Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics, Computational Mechanics Advances 2,1 – 124, 1994)에 대하여 설명한다. 일반적으로, 유한 차원 내적 벡터 공간 **V** 상의 선형 방정식인 수학식 2

수학식 2

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{F} \in \mathrm{V}$$

를 생각할 수 있다. K 는 정정치 대칭 선형 변환이다. V 의 부분 공간 Y 를 하나 선택한다. V 를 Y 로 K－ 직교 사영하는 K－ 직교 사영자 P $^{(Y)}$, $\mathbf{K}\mathbf{P}^{(Y)} = \mathbf{P}^{(Y)^T}\mathbf{K}$ 가 일의적으로 결정된다. $\mathbf{P}^{(Y)^T}$ 는 P $^{(Y)}$ 의 전치이다. 또한, 조건 P $^{(Y)}$ + P $^{(a)}$ =1을 만족하는 K－ 직교 사영자 P $^{(a)}$ (P $^{(Y)}$ 의 보사영자(補射影子)), $\mathbf{K}\mathbf{P}^{(a)} = \mathbf{P}^{(a)^T}\mathbf{K}$ 가 일의적으로 결정되어, 전체 공간 V 는 P $^{(Y)}$ 와 P $^{(a)}$ 의 상(像) 공간 Y , V $^{(a)}$ 로 수학식 3과 K－ 직교 직합(直和) 분해된다.

수학식 3

$$\mathrm{V} = \mathrm{Y} \oplus \mathrm{V}^{(a)}, \qquad \mathrm{Y} \perp_K \mathrm{V}^{(a)}, \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{Y} \\ \mathrm{V}^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{(Y)} \\ \mathrm{P}^{(a)} \end{pmatrix} \mathrm{V}$$

또한, P $^{(Y)}$ 와 P $^{(a)}$ 의 K－ 직교성을 통합하여 쓰면 수학식 4이기 때문에,

수학식 4

$$\mathbf{K}\begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(Y)} \\ \mathbf{P}^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(Y)^T} \\ \mathbf{P}^{(a)^T} \end{pmatrix}\mathbf{K}$$

선형 방정식인 수학식 2는

수학식 5

$$\mathbf{K}\begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(Y)} \\ \mathbf{P}^{(a)} \end{pmatrix}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{(Y)^T} \\ \mathbf{P}^{(a)^T} \end{pmatrix}\mathbf{F}$$

수학식 5로 분해되어, F의 KY -성분 $\mathbf{P}^{(Y)^T}\mathbf{F}$ 와 KV $^{(a)}$ -성분 $\mathbf{P}^{(a)^T}\mathbf{F}$, 혹은 u 의 Y -성분 P $^{(Y)}$ u 와 V $^{(a)}$ -성분 P $^{(a)}$ u 는 독립적으로 취급할 수 있게 된다. 즉, 방정식인 수학식 2는 독립적인 2개의 방정식인 수학식 6, 수학식 7에 수학식 8과 K－ 직교 직합 분리된다. 편의를 위해, 이하 Y 를 직접법 공간, Y 의 K－ 직교 보공간으로 되는 V $^{(a)}$ 를 반복법 공간이라 한다.

수학식 6

$$Ku^{(Y)} = F_{(Y)}, \quad u^{(Y)} \in Y, \quad F_{(Y)} \in KY$$

수학식 7

$$Ku^{(a)} = F_{(a)}, \quad u^{(a)} \in V^{(a)}, \quad F_{(a)} \in KV^{(a)}$$

수학식 8

$$u = u^{(a)} + u^{(Y)}, \quad F = F_{(a)} + F_{(Y)}$$

직접법 공간 Y 의 부분 공간 W 를 특별히 설정하는 것을 생각할 수 있다. 이 W 를 이하 coarse 공간이라 한다. W 의 K－ 직교 보공간을 fine 공간이라 한다. Y 를 W 와 W 의 K－ 직교 보공간 W^c 에 K－ 직교 직합 분해하면, 방정식인 수학식 6과 마찬가지로, W 상의 방정식인 수학식 9

수학식 9

$$u^{(W)} \in W \ : \ Ku^{(W)} = F_{(W)}, \quad F_{(W)} \equiv P^{(W)^T} F \in P^{(W)^T} V = KW$$

가 설정된다. 여기서, $P^{(w)}$ 는 W 로의 K－ 직교 사영자이다. 이 방정식은 coarse grid 문제라 한다. W 가 그 기저 $\{ e_j^{(W)} \}_j$ 의 설정에 의해 정의되어 있는 경우, 수학식 9는 구체적으로, 수학식 10으로 정식화된다.

수학식 10

$$u^{(W)} = e_j^{(W)} u^j, \quad K_{ij}^{(W)} u^j = F_i$$

여기서, 수학식 11로 정의한다.

수학식 11

$$K_{ij}^{(W)} \equiv e_i^{(W)} \cdot K e_j^{(W)}, \quad F_i \equiv e_i^{(W)} \cdot F = e_i^{(W)} \cdot F_{(W)}$$

$K_{ii}^{(w)}$ 는 coarse grid 매트릭스라 한다. 제2식의 등호는 W 와 fine 공간 $W^c \oplus_K V^{(a)}$ 의 K 에 의한 상(像) 공간 $K(W^c \oplus_K V^{(a)})$ 가 직교하는 것으로부터 온다.

K－ 직교 직합 분해한 방정식 중 수학식 6을 직접법에 의해, 수학식 7을 반복법에 의해 푸는 것을 생각할 수 있다. 방정식인 수학식 7에 반복법을 적용하면 제n 단계 반복식을 수학식 12 및 수학식 13으로 쓸 수 있다.

수학식 12

$$Ku_n^{(a)} + r_{(a)_n} = F_{(a)}, \qquad u_n^{(a)} \in V^{(a)}, \qquad F_{(a)} \in KV^{(a)}$$

수학식 13

$$r_{(a)_n} \equiv F_{(a)} - Ku_n^{(a)}, \qquad u_n \equiv u^{(Y)} + u_n^{(a)}$$

$r_{(a)_n}$ 은 제n 단계의 잔차(殘差)이다. $r_{(a)_n} \in KV^{(a)}$ 이다. 반복법으로서 $P^{(a)}GP^{(a)^T}$ (G 는 대칭)를 전처리 행렬을 포함하는 전처리(前處理)된 CG법: $P^{(a)}GP^{(a)^T}$ -CG법, 수학식 14 수학식 16을 채용한다.

수학식 14

$$p_0 = P^{(a)}Gr_{(a)_0} \in V^{(a)}$$

수학식 15

$$u_{n+1}^{(a)} = u_n^{(a)} + \alpha_n p_n, \qquad r_{(a)_{n+1}} = r_{(a)_n} - \alpha_n Kp_n, \qquad \alpha_n \equiv \frac{r_{(a)_n} \cdot Gr_{(a)_n}}{p_n \cdot Kp_n}$$

수학식 16

$$p_{n+1} = P^{(a)}Gr_{(a)_{n+1}} + \beta_n p_n, \qquad \beta_n \equiv \frac{r_{(a)_{n+1}} \cdot Gr_{(a)_{n+1}}}{r_{(a)_n} \cdot Gr_{(a)_n}}$$

여기서, p_n 은 $P^{(a)}GP^{(a)^T}$ -CG법 탐색 방향 벡터이다. $P^{(a)^T}r_{(a)_n} = r_{(a)_n} \in KV^{(a)}$ 에 주의. 이와 같이, K- 직교 직합 분해한 방정식 중 한 쪽에 대하여 전처리된 CG법에 의해 푸는 방법을 공역 사영 구배법(CPG법)이라 한다. 다른 한쪽 방정식을 직접법에 의해 푸는 것도 포함시켜서, 편의상 이하, 이것을 사영 CG법이라 한다.

부분 공간 $W \oplus_K V^{(a)}$ 으로의 K- 직교 사영자를 $P^{(w+a)}$ 로 기재한다. $P^{(a)}$ 자체를 직접 계산하는 것은 불가능하지만, $P^{(W+a)}$ 는 계산 가능하므로 W의 기저 $\{ e_j^{(W)} \}_j$ 가 제공되고 있는 경우를 생각할 수 있다. 그 경우에는 수학식 14 및 수학식 16에서의 전처리 $P^{(a)}Gr_{(a)_n}$ 의 계산은 다음과 같이 행한다. $P^{(a)}Gr_{(a)_n}$ 은 수학식 17로 쓸 수 있으며,

수학식 17

$$P^{(a)}Gr_{(a)_n} = P^{(W+a)}Gr_{(a)_n} - \mu_n^{(W)}, \qquad K\mu_n^{(W)} = P^{(W)^T}KGr_{(a)_n}$$

수학식 4로부터 $\mu_n^{(W)} \in$. 를 알 수 있다. 따라서, 전처리 계산 $P^{(a)}Gr_{(a)_n}$ 을 **coarse grid** 문제의 수학식 18로 귀착시킨다.

수학식 18

$$\mu_n^{(W)} \in W \ : \ K\mu_n^{(W)} = P^{(W)^T}KGr_{(a)_n}$$

coarse grid 문제는 수학식 10의 수순에 따라 풀 수 있다.

CGCG법의 특징을 위한, 기존의 유한 요소법 병렬 솔브 알고리즘 DDM, BDD법, 병렬 CG법을 설명한다. 이하에 설명하는 바와 같이, 영역 분할에 기초한 기존의 유한 요소법 병렬 솔브 알고리즘 DDM, BDD법은 **K-** 직교 직합 분해법에 기초한 사영 CG법의 일종으로 간주할 수 있다. 이하, 유한 요소법에 따라 정식화된 구조 문제의 전체 자유도의 공간을 V로 하여, 풀어야 할 선형 방정식을 수학식 19로 한다.

수학식 19

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{u},\ \mathbf{F} \in \mathbf{V}$$

여기서, K는 강성 매트릭스라 한다.

초대규모의 (자유도가 100만 정도 이상의) 문제를 효율적으로 (특히, 병렬 처리에 의해) 푸는 것을 목적으로 고안된 방법 중 하나로서 영역 분할법(DDM : Domain Decomposition Method)이 있다. 유한 요소법에 의해 분할된 각 요소를 상호 인접하는 것끼리 적당히 그룹으로 나눈다. 각 그룹이 차지하는 공간 영역을 부분 영역(subdomain)이라 한다(도 1 참조). 이것에 의해, 전체 영역이 먼저 부분 영역으로 분할되고, 다음으로 각 부분 영역의 유한 요소로 분할된다는 상황에 공간 이 계층적으로 분할 이산화되는 것으로 된다. 이것에 따라, 영역 전체에 관한 처리를 각 부분 영역마다의 처리와 부분 영역간 처리의 2 단계로 나눌 수 있다. 특히, 각 부분 영역마다의 처리는 병렬로 행할 수 있다. 상기 처리의 2 단계 분리는 구체적으로는, 영역 전체의 변위장을 부분 영역 내부에 작용하는 외력에 응답하는 부분 영역 내부의 변위장과, 부분 영역간 경계(내부 경계라 함) 상에 작용하는 외력에 응답하는 나머지 변위장으로 나누어서 따로따

로 처리함으로써 실현하고 있다. 후자의 변위장은 또한 부분 영역 내부의 변위장과 내부 경계 상의 변위장으로 나누어지며, 전자는 후자의 종속 변수가 된다. 독립 변수인 내부 경계의 자유도에 대해서는 CG법에 의해 푼다. 내부 경계에 대하여 풀면, 부분 영역 내부의 변위장은 그 경계 상의 변위를 경계 조건으로 하여 부하 제로의 변위장으로서 정해진다.

상세히 설명하면, 먼저 구조물이 차지하는 공간 영역 전체 $\bar{\Omega}$ 를 그 경계 Γ , 부분 영역 내부 전부의 합병 영역 Ω_i 및 내부 경계 Γ_s 로 나눈다. Γ 와 Γ_s 는 일부 중복된다. $\bar{\Omega}$ 상의 허용 변위장의 자유도 공간이 전체 자유도 공간 V 를 이룬다. 규격 직교 기저로서 형상 함수열 $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ 를 취함으로써 V 에 내적을 정의한다. 이 내적은 $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ 에 의존하여, 이산화의 방법에 의해 변하는 계산의 편의상 설정되는 것이며, 물리적 혹은 객관적 의미는 없다. 영역 $\bar{\Omega}-\Gamma_s$ 는 Ω_i 를 포함한다. $\bar{\Omega}-\Gamma_s$ 상의 허용 변위장의 자유도의 공간 V^i 와 내부 경계 Γ_s 상의 허용 변위장의 자유도의 공간 V^s 는 직교하여, 전체 자유도 공간 V 는 수학식 20과 같이 V^i 와 V^s 에 직교 직합 분해한다.

수학식 20

$$V = V_i \oplus V_s, \qquad V_i \perp V_s$$

이 직합 분해에 기초하여 V 상의 정정치 대칭 선형 변환 K 는 $K = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{pmatrix}$ 로 블록 분해되지만, 이것에 기초하여 수학식 21에서 블록 대각화(對角化)된다.

수학식 21

$$K = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ K_{si}K_{ii}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii} & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

S 는 Schur 의 보원(補元)이라 한다. 사영자 $P^{(i)}$, $P^{(a)}$ 를 수학식 22로 정의한다.

수학식 22

$$P^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 0 \end{pmatrix}, \qquad P^{(s)} \equiv 1 - P^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{(s)}$ 는 내부 경계 Γ_s 상의 변위장을, 그것을 경계 조건으로 하여 외력을 받지 않는 $\bar{\Omega}-\Gamma_s$ 상의 변위장에 대응시킨다. 정의로부터 수학식 23 및 수학식 24이기 때문에,

수학식 23

$$KP^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ K_{si}K_{ii}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{ii} & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{si}K_{ii}^{-1}K_{is} \end{pmatrix}$$

수학식 24

$$KP^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & S \end{pmatrix}$$

수학식 25로 되며,

수학식 25

$$K\begin{pmatrix} P^{(i)} \\ P^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(i)T} \\ P^{(s)T} \end{pmatrix}K$$

$P^{(i)}$, $P^{(s)}$ 는 조건 $P^{(i)} + P^{(s)} = 1$을 만족하는 K- 직교 사영자이다. 특히, $\begin{pmatrix} 0 & \\ & S \end{pmatrix} = P^{(s)T}KP^{(s)}$ 에 주의. 따라서, 이들 사영자에 의해 V 가 수학식 26으로

수학식 26

$$V = V^{(i)} \oplus V^{(s)}, \quad V^{(i)} \perp_K V^{(s)}, \quad V^{(i)} \equiv P^{(i)}V, \quad V^{(s)} \equiv P^{(s)}V$$

K- 직교 직합 분해된다. $\begin{pmatrix} V^i & V^s \end{pmatrix}$ 와 $\begin{pmatrix} V^{(i)} & V^{(s)} \end{pmatrix}$ 의 관계는 수학식 27이다.

수학식 27

$$V^{(i)} = V^i, \quad KV^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 \\ SV^s \end{pmatrix}, \quad V^{(s)} = P^{(s)}V^s = \begin{pmatrix} -K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 1 \end{pmatrix}V^s$$

$V^{(s)}$ 에 대해서는 다음의 것을 알 수 있다. 먼저, 제2식은 $V^{(s)}$ 가 $\bar{\Omega} - \Gamma_s$ 상의 반력(反力)이 제로이도록 한 변위장의 공간인 것을 나타내고 있다. 한편, 제3식은 $V^{(s)}$ 가 Γ_s 상의 변위장을 기하적 경계 조건으로서 갖는 $\bar{\Omega}$ 상

의 변위장의 공간인 것을 나타내고 있으며, 이들 V $^{(s)}$ 에 대하여 2개로 특징지어진 것은 등가이다. 또한, 사영자 **P** $^{(s)}$ 의 고유값 0에 속하는 고유 공간 즉, **kerP** $^{(s)}$ 에 대하여 **kerP** $^{(s)}$ = **V** $^{(i)}$ = **V** ^{i} 이므로 **V** ^{s} 와 **V** $^{(s)}$ 는 선형 동형이다. 따라서, **P** $^{(s)}$ 의 **V** ^{s} 로의 제한 **V** ^{s} -> **V** $^{(s)}$ 는 선형 동형인 것을 알 수 있다. 이것은 **V** $^{(s)}$ 가 변수 공간인 경우, 대신 **V** 를 변수 공간으로 취할 수 있다는 것을 나타내고 있다.

공간 및 방정식의 **K**- 직교 직합 분해의 직접법 공간 **Y** 와 반복법 공간 **V** $^{(a)}$ 를 수학식 28로 두며,

수학식 28

$$Y = V^{(i)}, \qquad V^{(a)} = V^{(s)}$$

수학식 14 수학식 16의 전처리 행렬 **G** 를 단위 행렬 **G** =1로 취하여 사영 CG법(J.Mandel, M.Brezina : Balancing Domain Decomposition : Theory and Performance in two and Three Dimensions, MGNet, http//casper.cs.yale.edu/mgnet/www/mgnet-papers.html)을 적용한 것이 영역 분할 법(DDM)이다. V $^{(i)}$ 는 $\bar{\Omega}-\Gamma_s$ 상의 허용 변위장의 자유도의 공간, **V** $^{(s)}$ 는 Γ_s 상의 허용 변위장과 그것을 경계 조건(정확하게는, 변위 구속 조건)으로서 갖는 $\bar{\Omega}$ 상의 외력을 받지 않는 변위장의 자유도의 공간을 나타낸다. **KV** $^{(s)}$ 는 **V** $^{(s)}$ 의 변위장에 대응하는 내부 경계 상의 반력의 자유도의 공간이다. 통상의 DDM 알고리즘은 상기에 따라 **V** $^{(s)}$ 대신 **V** ^{s} 를 변수 공간으로 취한다.

단위 행렬 이외의 G를 설정함으로써 전처리된 DDM도 가능하다. 일반적인 전처리 행렬 **G** 에 대하여,

$$G \cong S^{-} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & S^{-1} \end{pmatrix} = P^{(s)}K^{-1}P^{(s)^T}$$

일 때 전처리로서 유효하다고 할 수 있다.

DDM의 CG법에 이용되는 전처리로서, Neumann 전처리(P.Le.Tallec : Domain decomposition methods in computational mechanics, Computational Mechanics Advances 1 (2) (1994) 121-220)가 있다. 이것은 상기의 전처리 행렬 G를 단위 행렬 **I** 가 아니라 **Neumann** 전처리 행렬로 취한 것이다. **Neumann** 전처리 행렬은 각 부분 영역 **I** 의 국소 강성 매트릭스 **K** ^{I} 의 **Schur** 보원 **S** ^{I} (국소 **Schur** 보원이라 함)의 일반 역행렬 $S^{I^{-}}$ 를 사용하여 수학식 24에 상당하는 블록 분해 표시에 의해 수학식 29로 정의된다.

수학식 29

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \sum_I N^I D^I S^{I^-} D^{I^T} N^{I^T} \end{pmatrix}$$

여기서, **I** 는 영역 분할에 의한 부분 영역의 인덱스, **N** ^{I} 는 부분 영역 **I** 의 자유도를 영역 전체의 자유도로 사상하는 **0** - **1** 성분 행렬, { **D** ^{I} } $_{I}$ 는 **1** 인 각 부분 영역으로의 분해 행렬의 집합 $1 = \sum_I N^I D^I N^{I^T}$ 이다. 이 전처리는 일반 역행렬 S^{I^-} 선택 방법에 의해서는 조건 $G \cong S^{-}$ 을 만족하지 않을 가능성이 있다.

DDM에 **Neumann** 전처리를 적용하면, S^{I^-} 의 선택 방법의 임의성에 의해 부분 영역마다의 부정(不定)의 강체 변위가 반복 처리마다 혼입한다. 이것은 부분 영역마다 제각기 부유 운동을 생기게 하여, 반복 수속 효율을 악화시키는 원인으로 된다. 앞에서 설명한, 조건 $G \cong S^{-}$ 를 만족하지 않는 원인이기도 하다. BDD법(Balancing Domain Decomposition method, J.Mandel : Balancing Domain Decomposition, Communications on Numerical Methods in Engi neering 9 (1993) 233－341., J. Mandel, M. Brezina : Balancing Domain Decomposition : Theory and Performance in Two and Three Dimensions, MGNet, http://casper.cs.yale.edu/mgnet/www/mgnet－papers.html, ARASOL An Integrated Programming Environment for Parallel Sparse Matrix Solvers (Project No. 20160), Deliverable D 2.4 e Final report Domain Decomposition Algorithms for Large Scale Industrial Finite Element Problems, July 30,1999.)은 DDM에 기초하여, 내부 경계 상의 변위에 대하여 전처리된 CG법을 이용하여 푸는 해법이며, 특히, 선형 재료 미소 변형의 정적 문제에 대해서는, 내부 경계 상에 작용하는 외력에 응답하는 변위장을 부분 영역마다의 강체 변위와 나머지 변형 변위로 나누어서, 전자의 자유도만 먼저 직접법으로 풀고, 후자의 자유도를 다음의 전처리된 CG법에 의해 푸는 것이다. 즉, **Neumann** 전처리에, 앞서 푼 부분 영역마다의 강체 변위의 자유도의 혼입을 배제하는 사영을 반복할 때마다 추가한다. 좀 더 상세히 설명하면, 이 사영은 부분 영역에 불규칙한 부유 운동을 발생시키게 한 외력을 삭제한다는 형태로 행해지며, **K－** 직교 직합 분해된 방정식인 수학식 7 및 수학식 8에서 **F** $\rightarrow$ **F** $_{(a)}$ 의 대응되며, 사영 CG법 알고리즘이라 한다면 잔차 사영 **r** -> **r** $_{(a)}$ 이다. 이와 같이, **Neumann** 전처리된 DDM을 개선하여 부분 영역마다의 부유 운동을 억제할 수 있는 상기 사영 처리를 **balancing** 이라 한다.

구체적으로는, DDM에서의 부분 공간 **V** $^{(s)}$ = **P** $^{(s)}$ **V** ^{s} 를 또한 다음과 같이, **K－** 직교 직합 분해한다. **kerS** ^{I} 를 포함하는 부분 공간의 **I** 에 걸친 합 공간, 예를 들면 부분 영역마다의 강체 변위를 부분 영역 전부에 대하여 정합시킨 운동을 생각하고, 그 자유도의 공간을 **coarse** 공간 **W** 로 한다. **W** 는 **V** $^{(s)}$ 의 부분 공간이다. **V** $^{(s)}$ 를 **W** 와 그 **V** $^{(s)}$ 에서의 **K－** 직교 보공간 **V** $^{(t)}$ 로 **K－** 직교 직합 분해한다. 대응하는 **K－** 직교 사영자 의 쌍을 **P** $^{(w)}$, **P** $^{(t)}$ 로 한다. 수학식 30이 성립한다.

수학식 30

$$P^{(s)} = P^{(W)} + P^{(t)}, \qquad K\begin{pmatrix} P^{(W)} \\ P^{(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(W)^T} \\ P^{(t)^T} \end{pmatrix} K$$

전체 자유도 공간 **V** 는 수학식 31 및 수학식 32로 **K－** 직교 직합 분해된다.

수학식 31

$$V = V^{(i)} \oplus W \oplus V^{(t)}, \qquad V^{(i)} \perp_K W, \qquad V^{(i)} \perp_K V^{(a)}, \qquad W \perp_K V^{(t)}$$

수학식 32

$$W = P^{(W)}V, \qquad V^{(t)} = P^{(t)}V$$

공간 및 방정식인 **K－** 직교 직합 분해의 직접법 공간과 반복법 공간을 수학식 33으로 하며,

수학식 33

$$Y = V^{(i)} \oplus_K W, \qquad V^{(a)} = V^{(t)}$$

수학식 14 수학식 16의 전처리 행렬 **G** 를 **Neumann** 전처리 행렬로 취하여 사영 **CG** 법(J. Mandel, M. Brezina : Balancing Domain Decomposition : Theory and Performance in Two and Three Dimensions, MGNet, http://casper.cs.ya1e.edu/mgnet/www/mgnet-papers.html)을 적용한 것이 BDD법이다. 특히, 수학식 17 및 수학식 18에 상

당하는 전처리는 P $^{(W+a)}$ = P $^{(s)}$ 인 것으로부터 수 학식 34 및 수학식 35로 된다.

수학식 34

$$P^{(a)}Gr_{(a)_n} = P^{(s)}Gr_{(a)_n} - \mu_n^{(W)}$$

수학식 35

$$\mu_n^{(W)} \in W \quad : \quad K\mu_n^{(W)} = P^{(W)^T}KGr_{(a)_n}$$

사영 처리 $Gr_{(a)_n} \to P^{(s)}Gr_{(a)_n}$ 의 계산은 수학식 22를 그대로 계산한다.

BDD법의 반복법 공간 V $^{(t)}$ 는 동시에, 이후에 국소 **coarse** 공간인 W ^{I} 의 정의 부분에서 함께 정의되는 **balanced** 공간이기도 하다. **balanced** 공간의 상 공간 **SV** $^{(a)}$ 로의 **K** $^{-I}$ –직교 사영 $r_{(a)_n} \in SV^s \rightarrow P^{(a)^T}r_{(a)_n} \in SV^{(a)}$ 를 **balancing** 으로 한다(J. Mandel : Balancing Domain Decomposition, Communications on Numerical Methods in Engineering 9 (1993) 233-341., J. Mandel, M. Brezina : Balancing Domain Decomposition : Theory and Performance in Two and Three Dimensions, MGNet, http://casper.cs.yale.edu/mgnet/www/mgnet–papers.html」. **Balancing** 은 BDD법에 적용한 사영 CG법의 알고리즘 수학식 14 수학식 16에는 직접 나타나지 않으며, **K**– 직교 사영 $Gr_{(a)_n} \in V^s \subset V \to P^{(a)}Gr_{(a)_n} \in V^{(a)}$ 수학식 14 및 수학식 16이 그것에 대응한다. DDM의 경우와 대조적으로 BDD법의 경우에는, G는 $G \not\cong S^-$ 이어도 $P^{(a)}GP^{(a)^T} \cong P^{(a)}S^-P^{(a)^T} = P^{(a)}K^{-1}P^{(a)^T}$ 이면 전처리로서 유효하다. **Neumann** 전처리 행렬 수학식 29는 이 조건을 만족시키므로, 본절 첫머리에서 제시한 **Neumann** 전처리된 DDM의 문제점이 해결된다.

병렬 CG법은 영역 분할을 행하지 않고, 전체 자유도 공간 V를 그대로 CG법에 의해 처리한다. **V** 의 **K**– 직교 직합 분해도 행하지 않는다. 직접법 공간을 **Y** ={0}으로 취하는 것에 상당한다. 문제가 대규모이고, 벡터 공간 V의 차원이 큰 경우에는 해석 대상의 공간 영역을 몇가지로 분할하여(이것을 부분(part)이라 함), 그것에 수반되는 **V** 의 분해(경계가 중복된 분해)에 따라 각각의 부분 공간에 대한 자유도를 별개의 프로세서가 처리한다. 벡터의 내적이나 행렬 벡터곱(외적)과 같이 부분 공간 상호의 정보 교환이 필요한 계산을 행하고자 할 때에 한하여 프로세스간 통신이 필요해진다.

이상, 초대규모 구조 문제를 해결하는 방법으로서, 영역 분할법(DDM : Domain Decomposition Method), Neumann 전처리된 DDM, BDD법(Balancing Domain Decomposition Method), 병렬 CG법의 해법에 대하여 설명하였다. 그러나, 이들 방법에서는, 초대규모 구조 문제를 푸는 경우, 발산하여 해가 구해지지 않기 때문에, 계산 시간이 매우 길어진다는 문제가 지적되고 있다. 본 발명은 이러한 상황에 감안하여 이루어진 것으로, 자유도가 100분 이상인 초대규모 구조 문제를 풀 때, 해가 발산되지 않고 구해져, 반복 계산의 횟수가 적어지므로, 단시간의 계산 시간으로 해를 구할 수 있는, 초대규모 구조 문제를 푸는 시스템 CGCG법을 제공하고자 하 는 것이다.

<발명의 개시>

본 발명은 초대규모 구조 문제를 푸는 시스템, 해당 시스템을 기능시키기 위한 프로그램 및 해당 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체를 포함하는 것이다. CGCG법은 영역 분할을 행하여, 그것에 기초하여 부분 영역의 내부와 경계의 구별을 행하지 않고 **coarse** 공간을 설정하여, 전처리로서 간편한 대각 스케일링을 채용한 전처리된 사영 CG법을 이용하는, 초대규모 구조 문제를 위한 유한 요소법 솔브 알고리즘이다.

본 발명은, 자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템으로서, 영역 분할을 행하는 수단, 부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배하는 수단, 강성 매트릭스를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단, 전체 자유도의 전처

리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단 및 변위 해를 출력하는 수단을 포함하는 것을 특징으로 하는 병렬 유한 요소법 계산 시스템이다.

또한, 상기 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단이, 전체 자유도 표시의 사영자를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 작성하는 수단 및 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 **LU** 분해하는 수단을 포함할 수 있다.

상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단이, 전체 자유도의 초기 변위를 설정하는 수단, 전체 자유도의 초기 잔차를 계산하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단 및 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값을 설정하는 수단을 포함할 수 있다.

그리고, 상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단이 전체 자유도의 변위를 갱신하는 수단, 전체 자유도의 잔차를 갱신하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터를 갱신하는 수단 및 수속을 판정하는 수단을 포함할 수 있다.

본 발명은, 상기 시스템을 기능시키는 프로그램이기도 하다. 즉, 자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템으로서, 영역 분할을 행하는 수단, 부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배하는 수단, 강성 매트릭스를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단 및 변위 해를 출력하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램이다. 그리고, 상기 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단이, 전체 자유도 표시의 사영자를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 작성하는 수단 및 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 LU 분해하는 수단으로서 기능시킬 수 있으며, 상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단이, 전체 자유도의 초기 변위를 설정하는 수단, 전체 자유도의 초기 잔차를 계산하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단 및 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값을 설정하는 수단으로서 기능시킬 수 있고, 상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단이, 전체 자유도의 변위를 갱신하는 수단, 전체 자유도의 잔차를 갱신하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터를 갱신하는 수단 및 수속을 판정하는 수단으로서 기능시킬 수 있다.

또한, 본 발명은 상기 시스템을 기능시키는 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체이기도 하다.

즉, 자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템으로서, 영역 분할을 행하는 수단, 부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배하는 수단, 강성 매트릭스를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단 및 변위 해를 출력하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체이며, 상기 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단이 전체 자유도 표시의 사영자를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 작성하는 수단 및 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 **LU** 분해하는 수단으로서 기능시킬 수 있으며, 상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단이, 전체 자유도의 초기 변위를 설정하는 수단, 전체 자유도의 초기 잔차를 계산하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단 및 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값을 설정하는 수단으로서 기능시킬 수 있으며, 상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단이, 전체 자유도의 변위를 갱신하는 수단, 전체 자유도의 잔차를 갱신하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터를 갱신하는 수단 및 수속을 판정하는 수단으로서 기능시킬 수 있다.

도면의 간단한 설명

도 1은 영역 분할을 설명하는 도면.

도 2는 CGCG법의 계산 흐름도.

<발명을 실시하기 위한 최량의 형태>

CGCG법은 영역 분할을 행하고, 그것에 기초하여 부분 영역의 내부와 경계의 구별을 하지 않고 **coarse** 공간을 설정하여, 전처리로서 간편한 대각 스케일링을 채용한 전처리된 사영 CG법을 이용하는, 초대규모 구조 문제를 위한 유한 요소법 솔브 알고리즘이다. DDM, BDD법과 마찬가지로, CGCG법은 영역 분할에 기초한 사영 CG법을 기반으로 한다. 먼저, **Y** = **W** 로 취하고, 사영 CG법에 의해 수학식 3에 준거하여 전체 자유도 공간 **V** 를 수학식 36

수학식 36

$$V = W \oplus V^{(a)}, \quad W \perp_K V^{(a)}, \quad \begin{pmatrix} W \\ V^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(W)} \\ P^{(a)} \end{pmatrix} V$$

으로 K－ 직교 분해한다. 이 때, coarse 공간 W 로서 V 의 어느 부분 공간을 선택할지가 문제가 된다. CGCG법에서는 W 로서 영역 분할에서의 부분 영역마다의 임의의 한정된 운동(예를 들면, 강체 운동)을 나타내는 V 의 부분 공간을 선택한다.

예를 들면, W로서 BDD법과 마찬가지로, 부분 영역마다의 강체 변위를 부분 영역 전부에 대하여 정합시킨 운동의 자유도의 공간을 채용한 경우, $V^{(a)}$ 는 부분 영역 내부의 변형 운동을 나타내는 변위장의 공간을 이룬다. 즉, BDD법의 설정식인 수학식 33에 비해 직접법 공간과 반복법 공간을 수학식 37으로 취한 것이 된다.

수학식 37

$$Y = W, \quad V^{(a)} = V^{(i)} \oplus V^{(t)}, \quad V^{(i)} \perp_K V^{(t)}$$

이 경우, BDD법이 $V^{(i)}$ 의 자유도에 대해서는 직접법으로 푸는 데 대하여, CGCG법에서는 그것도 포함시켜 CG법으로 푼다. 이 의미에서, CGCG법 쪽이 BDD법보다 CG법의 부담이 많고 직접법의 부담이 덜하다. 사영 CG법 전처리에서도 CGCG법에서는 BDD법에서의 수학식 34의 사영 처리 $Gr_{(a)_n} \to P^{(s)}Gr_{(a)_n}$ 이 없는 분직접법(分直接法)의 역할이 적다.

Coarse 공간 W 의 실장면에서의 취급도 DDM법과 병렬 CG법의 차이를 반영하여 다음과 같이 달라진다. DDM법에서는 V^s 를 변수 공간에 취하기 위해, 영역 전체의 변위장을 부분 영역 내의 변위와 내부 경계 상의 변위로 나누어서 취급한다. 병렬 CG법에서는 부분 영역을 그 내부와 내부 경계로 나누지 않고, 부분 영역은 그 내부 와 경계를 일체로서 취급한다. BDD법에서의 coarse 공간 W 는 다음과 같이 설정된다. 각 부분 영역의 경계(내부 경계 중 일부)의 강체 변위를 먼저 정식화하고, 그 부분 영역 전부에 걸친 중첩 공간 W^s 를 설정한다. 그것을 수학식 22의 $P^{(s)}$ 에 의해 K－ 직교 사영하여 부분 영역 내의 강체 변위로 확장하여 W로 한다 $(W = P^{(s)}W^s)$. 한편, CGCG법에서의 coarse 공간 W 는 각 부분 영역마다 그 내부와 경계 전체의 강체 변위를 직접 정식화하여 그 부분 영역 전부에 걸쳐 중첩시켜 설정한다. 이것에 따라, 사영 CG법의 전처리에서는 공간 W^s 의 자유도의 구해(求解) 이외에 부분 영역마다의 직접법 처리의 수고를 하게 되는(Shur 보원의 계산을 위해) BDD법에 대하여, CGCG법에서는, 그 내부도 포함시킨 부분 영역마다의 강체 변위의 자유도에 대하여 풀기만 하여도 된다.

방정식인 수학식 1을 수학식 6　　수학식 8에 준거하여 수학식 38, 수학식 39 및 수학식 40

수학식 38

$$Ku^{(W)} = F_{(W)}, \quad u^{(W)} \in W, \quad F_{(W)} \in KW$$

수학식 39

$$Ku^{(a)} = F_{(a)}, \quad u^{(a)} \in V^{(a)}, \quad F_{(a)} \in KV^{(a)}$$

수학식 40

$$u = u^{(a)} + u^{(W)}, \quad F = F_{(a)} + F_{(W)}$$

으로 분해한다. 수학식 38은 변위장 W -성분 $u^{(W)}$ 를 결정하는 COARSE GRID 문제, 수학식 39는 변위장 $V^{(a)}$ –성분 $u^{(a)}$ 를 결정하는 방정식이다. CGCG법에서는 사영 CG법에 준거하여 수학식 38을 직접법인 수정 콜레스키(cholesky)법, 수학식 39를 사영 CG법의 전처리된 CG 반복 처리에 의해 푼다. 전처리된 CG 반복 처리의 전처리 행렬 $\bar{G}$ 는 수학식 14 수학식 16에서 $G = D_K^{-1}$ 로 선택하여 수학식 41

수학식 41

$$\bar{G} = P^{(a)} D_K^{-1} P^{(a)T}$$

로 설정한다. 여기서, D_K^{-1} 는 D_K 의 역행렬, D_K 는 K 의 대각 행렬(대각 성분이 K 의 대각 성분과 동일한 대각 행렬)이다. 잔차 $r_{(a)n} \in KV^{(a)}$ 로의 작용은 실질적으로는, $\bar{G}r_{(a)n} = P^{(a)} D_K^{-1} r_{(a)n}$ 즉, CGCG법의 전처리는 K 의 대각 스케일링과 반복법 공간 $V^{(a)}$ 로의 K– 직교 사영 $P^{(a)}$ 의 합성이다.

BDD법에서는 Neumann 전처리라는 각 부분 영역에서 국소 Schur 보원 S^I 의 일반 역행렬 S^{I-} 계산을 행한다는 복잡한 전처리를 행하는 데 반하여, CGCG법에서는 대각 스케일링이라는 간편한 전처리에 의해 계산 비용과 메모리 사용량을 대폭 삭감하고 있다.

CGCG법에서의 K– 직교 분해 수학식 36에서의 coarse 공간 W 의 정의를 설명한 다. I 를 영역 분할에 의한 부분 영역의 인덱스로 한다. 부분 영역 I 내의 자유도가 이루는 벡터 공간을 V^I 로 한다. V^I 의 부분 공간 W^I 를 정한다. 이것을 국소 coarse 공간이라 부르기로 한다. coarse 공간 W 를 $\{W^I\}_I$ 의 가중 중첩시켜 수학식 42를 정의한다.

수학식 42

$$W = \mathrm{span}\left\{ N^I D^I W^I \right\}_I = \bigoplus_I N^I D^I W^I$$

여기서, $\{D^I\}_I$ 는 Neumann 전처리와 마찬가지로, 하나의 각 부분 영역으로의 분해 $1 = \sum_I N^I D^I N^{I^T}$ 이다. W^I 는 부분 영역 I 의 규정된 운동(예를 들면, 강체 운동)을 나타내는 변위장의 공간이다. $m^I \equiv \dim W^I$ 를 W^I 의 차원, $\{Z_j^I\}_{j=1,L,m^I}$ 를 W^I 의 기저로 한다.

수학식 43

$$\left\{ N^I D^I Z_j^I \right\}_{j=1,L,m^I{}_I}$$

수학식 43은 W 의 기저를 이루고, W 의 차원은 $\sum_I m^I$ 이다.

특히, W ^{I} 가 조건 kerS $^I \subset$ W ^{I} 를 만족할 때, 대응하는 fine 공간의 부분 공간을 balanced 공간이라 한다. BDD법에서는 Neumann 전처리를 행하기 위해, W ^{I} 는 kerS $^I \subset$ W ^{I} 를 만족할 필요가 있지만 CGCG법에서는 그와 같은 제약이 없다. 즉, CGCG법의 반복법 공간 V $^{(a)}$ 은 balanced 공간일 필요가 없다.

부분 영역 I 의 규정된 운동으로서 강체 운동을 생각한다. 이 때 W ^{I} 는 구체적으로는 다음과 같이 구성할 수 있다. 부분 영역 I 의 강체 운동은 다음과 같이 표현할 수 있다. $\mathbf{X}_\alpha^I$ 를 부분 영역 I 상의 절점 α 의 초기 좌표, $\mathbf{x}_\alpha^I$ 를 변형 후의 좌표로 하여, 수학식 44, 수학식 15, 및 수학식 45로 된다.

수학식 44

$$\mathbf{x}_\alpha^I = \mathbf{P}_j v^j + e^{O_j \theta^j} \mathbf{X}_\alpha^I$$

수학식 45

$$\mathbf{P}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

수학식 46

$$O_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad O_2 \equiv \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \quad O_3 \equiv \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

미소 변형을 생각하면, 수학식 47 및 수학식 48이다.

수학식 47

$$x_\alpha^I \cong P_j v^j + (1 + O_j \theta^j) X_\alpha^I$$

수학식 48

$$u_\alpha^I \cong P_j v^j + O_j X_\alpha^I \theta^j = v + \theta \times X_\alpha^I, \qquad v \equiv \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad \theta \equiv \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix}$$

따라서, W ^{I} 를 다음의 조건으로 정의되는 부분 영역 I 상의 6개의 변위장 $\{Z_j^I\}_{j=1,L,6}$ 을 기저로 하는, 6차원 벡터 공간으로 정의한다. 즉, 수학식 49 및 수학식 50이다.

수학식 49

$$\begin{aligned} Z_j^I &: Z_j^I(X_\alpha^I) = P_j \\ Z_{3+j}^I &: Z_{3+j}^I(X_\alpha^I) = O_j X_\alpha^I \end{aligned}, \qquad j = 1, 2, 3$$

수학식 50

$$W^I \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{m^I} Z_j^I \mu^j \,\middle|\, \mu^j \in \mathbf{R} \right\}, \qquad m^I \le 6$$

단, 수학식 50에서는 다음의 사정을 고려하고 있다. 부분 영역에 의해서는 그 강체 운동의 자유도가 5 이하인 경우가 있을 수 있다. 그 경우에는 Z_j^I 의 번호 j를 반복하여 바꾸어서, 그 기저가 $\{Z_j^I\}_{j=1,L,m^I}$, $m^I \equiv \dim W^I \le 6$ 으로 되도록 한다. 번호 j의 반복 변경에는 Gram-Schmidt 의 직교화법을 이용한다.

BDD법에서는, 수학식 49에서 정의되는 $\{Z_j^I\}_{j=1,L,6}$ 으로서 부분 영역 I 상에서가 아니고, 그 내부 경계 상의 6개의 변위장을 정하는 부분이 CGCG법과 서로 다르 다.

상기의 규정된 운동으로서의 강체 운동의 정식을 미소 변형 문제 솔리드 모델의 강체 운동에 적용하는 것은 용이하다. 솔리드 모델인 경우, 수학식 49에서 정의되는 부분 영역 I 상의 6개의 변위장 $\{Z_j^I\}_{j=1,L,6}$ 은 그 절점 α의 성분이 수학식 51로 된다.

수학식 51

$$\left\{ Z_1^I(X_\alpha^I),\ Z_2^I(X_\alpha^I),\ Z_3^I(X_\alpha^I),\ Z_4^I(X_\alpha^I),\ Z_5^I(X_\alpha^I),\ Z_6^I(X_\alpha^I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X^{\alpha 3} & -X^{\alpha 2} \\ 0 & 1 & 0 & -X^{\alpha 3} & 0 & X^{\alpha 1} \\ 0 & 0 & 1 & X^{\alpha 2} & -X^{\alpha 1} & 0 \end{pmatrix}$$

여기서, $\mathbf{X}^{I}_{\alpha}$ 은 부분 영역 I 상의 절점 α 의 초기 좌표이다.

이어서, 미소 변형 문제 셀 모델로의 적용을 설명한다. 절점 α 에서의 셀 중립면이 접하는 공간의 규격 직교 기저를 하나 선택하여 $\left(\mathbf{e}^{\alpha}_{1} \quad \mathbf{e}^{\alpha}_{2}\right)$ 로 한다. $\mathbf{e}^{\alpha}_{3}$ 을 절점 α 의 초기 디렉터로 한다. 임의의 셀(shell) 요소 상의 점의 좌표 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ 은 수학식 52로 쓸 수 있다.

수학식 52

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi^1, \xi^2)\left(\mathbf{X}^{\alpha}+\mathbf{U}^{\alpha}+\frac{a^{\alpha}\xi^3}{2}\left(1+\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}\times\right)\mathbf{e}^{\alpha}_{3}\right)$$

여기서, (ξ^1, ξ^2, ξ^3) 은 해당 셀 요소의 국소 좌표이다. 또한, N_{α}, $\mathbf{X}^{\alpha}$, $\mathbf{U}^{\alpha}$, $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ 는 절점 α의 각각 셀 중립면 상에서 정의된 형상 함수, 초기 절점 좌표, 현절점 변위, 현 디렉터의 회전량이다. $\sum_{\alpha}$ 는 해당 셀 요소에 포함되는 절점에 걸친 합을 나타낸다.

먼저, 셀의 미소 평행 이동 x -> x+a 는 수학식 53이다.

수학식 53

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{a} = \sum_{\alpha} N_{\alpha}\left[\mathbf{X}^{\alpha}+\mathbf{U}^{\alpha}+\mathbf{a}+\frac{a^{\alpha}\xi^3}{2}\left(1+\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}\times\right)\mathbf{e}^{\alpha}_{3}\right]$$

즉, 절점 변위 U α 와 현 디렉터의 회전량 $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ 의 변화에 의해 정리하면 수학식 54이다.

수학식 54

$$\begin{pmatrix}\mathbf{U}^{\alpha}\\ \boldsymbol{\varphi}^{\alpha}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{U}^{\alpha}+\mathbf{a}\\ \boldsymbol{\varphi}^{\alpha}\end{pmatrix}$$

다음으로, 셀의 미소 강체 회전을 생각한다. 변위 U α 및 현 디렉터의 회전 $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ 는 미소하다고 한다. 좌표 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ 에 미소 강체 회전 $1+O_i\theta^i=1+\boldsymbol{\theta}\times$ 을 작용시킨다. 여기서, $\{O_i\}_{i=1,2,3}$ 은 수학식 46에서 정의된 매트릭스, $\boldsymbol{\theta}=\left(\theta^1 \quad \theta^2 \quad \theta^3\right)^T$ 는 회전 방향 벡터이다. 미소 강체 회전에 의한 현 절점 좌표 X α + U α , 현 디렉터 $\psi^{\alpha}\cong\left(1+\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}\times\right)\mathbf{e}^{\alpha}_{3}$ 의 변화량은 미소량 1차까지 생각하여 수학식 55이 다.

수학식 55

$$\theta\times\left(X^{\alpha}+U^{\alpha}\right)\cong\theta\times X^{\alpha},\qquad \theta\times\left(1+\varphi^{\alpha}\times\right)e_3^{\alpha}\cong\theta\times e_3^{\alpha}=\theta^{\alpha}\times e_3^{\alpha}$$

여기서, θ^{α} 은 θ 를 절점 α 에서의 셀 중립면의 접공간($\left(e_1^{\alpha}\quad e_2^{\alpha}\right)$ 에 의해 연장되는 부분 공간)으로 사용한 벡터인 수학식 56이다.

수학식 56

$$\theta^{\alpha}\equiv\left(e_1^{\alpha}\quad e_2^{\alpha}\right)\begin{pmatrix}e_1^{\alpha}\cdot\theta\\ e_2^{\alpha}\cdot\theta\end{pmatrix}$$

따라서, 미소 강체 회전에 의한 좌표 x 전체의 변화량은 수학식 57로 된다.

수학식 57

$$\theta\times x\cong\sum_{\alpha}N_{\alpha}\left(\theta\times X^{\alpha}+\frac{a^{\alpha}\xi^{3}}{2}\theta^{\alpha}\times e_3^{\alpha}\right)$$

따라서, 셀의 미소 강체 회전은 절점 변위 U^{α} 와 현 디렉터의 회전량 φ^{α} 의 변화로 정리하면 수학식 58이다.

수학식 58

$$\begin{pmatrix}U^{\alpha}\\ \varphi^{\alpha}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}U^{\alpha}+\theta\times X^{\alpha}\\ \varphi^{\alpha}+\theta^{\alpha}\end{pmatrix}$$

미소 평행 이동 x -> x+a 와 미소 강체 회전 $x\rightarrow\left(1+\theta\times\right)x$ 를 합하면 수학식 59 이다.

수학식 59

$$\begin{pmatrix}U^{\alpha}\\ \varphi^{\alpha}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}U^{\alpha}+a+\theta\times X^{\alpha}\\ \varphi^{\alpha}+\theta^{\alpha}\end{pmatrix}$$

추가분 $\begin{pmatrix}a+\theta\times X^{\alpha}\\ \theta^{\alpha}\end{pmatrix}$ 를 성분으로 쓰면 수학식 60으로 된다.

수학식 60

$$\begin{pmatrix} a+\theta\times X^{\alpha} \\ \theta^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X^{\alpha^3} & -X^{\alpha^2} \\ 0 & 1 & 0 & -X^{\alpha^3} & 0 & X^{\alpha^1} \\ 0 & 0 & 1 & X^{\alpha^2} & -X^{\alpha^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1^{\alpha^1} & e_1^{\alpha^2} & e_1^{\alpha^3} \\ 0 & 0 & 0 & e_2^{\alpha^1} & e_2^{\alpha^2} & e_2^{\alpha^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix}$$

으로 된다. 즉, 수학식 49에서 정의되는 부분 영역 I 상의 6개의 변위장 <스캔; 23면 10행>은 그 절점 α 의 성분이 수학식 61로 된다.

수학식 61

$$\left\{ Z_1^I(X_\alpha^I),\ Z_2^I(X_\alpha^I),\ Z_3^I(X_\alpha^I),\ Z_4^I(X_\alpha^I),\ Z_5^I(X_\alpha^I),\ Z_6^I(X_\alpha^I) \right\}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X^{\alpha^3} & -X^{\alpha^2} \\ 0 & 1 & 0 & -X^{\alpha^3} & 0 & X^{\alpha^1} \\ 0 & 0 & 1 & X^{\alpha^2} & -X^{\alpha^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1^{\alpha^1} & e_1^{\alpha^2} & e_1^{\alpha^3} \\ 0 & 0 & 0 & e_2^{\alpha^1} & e_2^{\alpha^2} & e_2^{\alpha^3} \end{pmatrix}$$

X_α^I 은 부분 영역 I 상의 절점 α 의 초기 좌표이다.

부분 영역 I 의 규정된 운동으로서 아핀(affine) 변환(직선을 직선에 전사하 고, 그 위의 유향 성분비를 바꾸지 않는다고 특징지어지는 변환)으로 표현되는 운동(이하, 아핀 변환 운동이라 부르기로 함)을 생각할 수 있다.

즉, 상술한 강체 운동을 일반화한 것이며, 병진 운동과 일반 선형 변환 운동의 합성이다. 이 경우 W ^{I} 는 구체적으로 다음과 같이 구성할 수 있다.

부분 영역 I 의 아핀 변환 운동은 다음과 같이 표현할 수 있다. X_α^I 를 부분 영역 I 상의 절점 α 의 초기 좌표, x_α^I 를 변형 후의 좌표로 하여,

수학식 62

$$x_\alpha^I = P_j v^j + e^{E_j^{e}\alpha^j + E_j^{s}\varepsilon^j + O_j\theta^j} X_\alpha^I$$

수학식 63

$$E_1^e \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad E_2^e \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad E_3^e \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

수학식 64

$$E_1^s \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix},\quad E_2^s \equiv \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix},\quad E_3^s \equiv \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

혹은, 수학식 65, 수학식 66, 수학식 67, 및 수학식 68이다.

수학식 65

$$x_\alpha^I = P_j v^j + e^{E_{ij}\theta^{ij}} X_\alpha^I$$

수학식 66

$$E_{11} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad E_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad E_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

수학식 67

$$E_{21} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad E_{22} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix},\quad E_{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

수학식 68

$$E_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix},\quad E_{32} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{33} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

미소 변형을 생각할 때, 수학식 69 및 수학식 70이다.

수학식 69

$$\mathbf{x}_\alpha^I \cong \mathbf{P}_j v^j + (1 + E_{ij}\theta^{ij})\,\mathbf{X}_\alpha^I$$

수학식 70

$$\mathbf{u}_\alpha^I \cong \mathbf{P}_j v^j + E_{ij}\mathbf{X}_\alpha^I \theta^{ij}, \qquad \mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad \theta^{ij} \equiv \begin{pmatrix} \theta^{11} & \theta^{12} & \theta^{13} \\ \theta^{21} & \theta^{22} & \theta^{23} \\ \theta^{31} & \theta^{32} & \theta^{33} \end{pmatrix}$$

따라서, W ^{I} 를 다음의 조건으로 정의되는 부분 영역 I 상의 12의 변위장 $\{ Z_j^I \}_{j=1,L\ ,12}$ 를 기저로 하는, 12차원 벡터 공간으로 정의한다. 즉, 수학식 71에 의해

수학식 71

$$\begin{aligned} Z_j^I &: Z_j^I(\mathbf{X}_\alpha^I) = \mathbf{P}_j \\ Z_{3i+j}^I &: Z_{3i+j}^I(\mathbf{X}_\alpha^I) = E_{ij}\mathbf{X}_\alpha^I \end{aligned}, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad j = 1, 2, 3$$

수학식 72이다.

수학식 72

$$W^I \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{m^I} Z_j^I \mu^j \;\middle|\; \mu^j \in \mathbf{R} \right\}, \qquad m^I \le 12$$

강체 운동의 경우와 마찬가지로, 수학식 72에서는 다음의 사정을 고려하고 있다. 부분 영역에 따라서는, 그 아핀 변환 운동의 자유도가 11 이하인 경우가 있을 수 있다. 그 경우에는 Z_j^I 의 번호 j를 다시 매겨서, 그 기저가 $\{ Z_j^I \}_{j=1,L\ ,m^I}$, $m^I \equiv \dim W^I \le 12$ 로 되도록 한다. 번호 j를 다시 매길 때에는 Gram – Schmidt 의 직교화법을 이용한다.

다음으로, CGCG법에 의한 병렬 유한 요소법 솔브의 구체적인 계산 수순을 설명한다.

1. 영역 분할

해석 영역 전체를 복수의 부분 영역으로 분할한다.

2. 부분 영역의 각 프로세서가 담당하는 부분으로의 분배

분할한 부분 영역의 각 계산 노드(CPU)로의 할당을 정한다. 즉, 각 계산 노 드(CPU)는 1개 또는 복수의 부분 영역을 담당한다. 각 노드가 담당하는 부분 영역 전체를 부분으로 칭한다(도 1 참조).

3. 강성 매트릭스의 작성

각 노드에서, 담당 부분 영역에 대한 강성 매트릭스를 작성한다.

4. 부분 영역 전체 중첩 운동 설정

4.1 전체 자유도 표시의 사영자 작성

부분 영역 전체 중첩 운동을 추출하기 위한 전체 자유도 표시의 coarse 공간의 기저(부분 공간의 기저는 그 부분 공간으로의 사영자로 간주할 수 있음) $D^I Z^I \equiv \{ D^I Z_j^I \}_{j=1,L,m^I}$ 를 각 노드의 담당 부분 영역에 대하여 작성한다.

4.2 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스 K_{rgd} 의 작성

부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스 $K_{rgd} = K_{rgd_{ij}}^{IJ} = D^I Z_i^I \cdot K D^J Z_j^J$ 를 작성한다. 이 계산은 각 부분 영역의 강체 매트릭스 K ^{I} 을 유지하는 노드에서 그 부분 영역으로부터의 기여를 구하여, 그것을 전체에 걸쳐 가산함으로써 구할 수 있다.

4.3 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스 K_{rgd} 의 LU 분해 K_{rgd} 의 대하여, LU 분해 $K_{rgd} = L_{rgd} U_{rgd}$ 를 행한다. 이 LU 분해된 L_{rgd} , U_{rgd} 를 모든 노드에서 유지하여 둔다.

5. 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법 초기 설정

5.1 전체 자유도의 초기 변위 설정

5.1.1 부분 영역 전체 중첩 운동 **μ** $^{(w)}$

다음 방정식인 수학식 73을 **μ** $^{(w)}$ 에 대하여 푼다.

수학식 73

$$K_{rgd} \mu^{(W)} = (NDZ)^T F$$

여기서, $NDZ \equiv \{ N^I D^I Z_j^I \}_{j=1,L,m^I I}$ 이다. F 는 각 노드가 담당 부분 영역에 관하여 유지되어 있으며, 각 노드에서 $(NDZ)^T F$ 를 구한 후 통신하여 영역 전체에 걸친 우변 벡터를 작성하고, 모든 노드에서 LU 분해한 K_{rgd} 를 이용하여 **μ** $^{(W)}$ 를 구한다. 수학식 10의 **u** $^{(w)}$ 에 상당하는 것은 **u** $^{(w)}$ = **NDZμ** $^{(w)}$ 이다.

5.1.2 초기 변위 u $_0$ 의 설정

초기 변위 u_0 를 수학식 74에 의해 설정한다.

수학식 74

$$u_0 = NDZ\mu^{(W)}$$

이 u_0 는 각 노드의 담당 영역 부분에 대해서만 유지한다.

5.2 전체 자유도의 초기 잔차 g_0 의 계산

초기 잔차 g_0 를 수학식 75에 의해 구한다.

수학식 75

$$g_0 = Ku_0 - F$$

이 잔차 벡터는 각 노드의 담당분만을 유지한다. 수학식 14　수학식 16에서 설명한 잔차 $r_{(a)n}$ 과 부호가 역인 것에 주의.

5.3 대각 스케일링 전처리 계산

잔차 g_0 에 대하여 $D_K^{-1}g_0$ 를 구하는 (대각 스케일링 전처리). 여기서, D_K^{-1} 은 D_K 의 역행렬, D_K 는 K 의 대각 행렬(대각 성분이 K인 대각 성분과 동일한 대각 행렬)이다. 각 노드에서 담당 부분에 대하여 구한다.

5.4 전체 자유도의 Coarse Grid 전처리 계산

이하와 같이, Coarse Grid 전처리 $P^{(a)}Gg_0 = \bar{G}g_0$ 를 행한다.

5.4.1 부분 영역 전체 중첩 운동 변수 $\mu^{(w)}$

다음 방정식인 수학식 76을 $\mu^{(w)}$ 에 대하여 푼다.

수학식 76

$$K_{rgd}\mu^{(W)} = -(NDZ)^T KD_K^{-1}g_0$$

우변 벡터는 통신하여 모든 노드에서 전체 영역에 걸쳐 작성하고, 모든 노드 에서 $\mu^{(w)}$ 를 구한다.

5.4.2 $\mu_0^{(W)}$ 의 설정

$\mu_0^{(W)}$ 를 수학식 77과 같이 설정한다.

수학식 77

$$\mu_0^{(W)} = NDZ\mu^{(W)}$$

$\mu_0^{(W)}$ 는 담당 부분만 유지한다.

5.4.3 $P^{(a)}Gg_0 = \bar{G}g_0$ 의 계산

$\bar{G}g_0$ 를 수학식 78과 같이 계산한다.

수학식 78

$$\bar{G}g_0 = \mu_0^{(W)} + D_K^{-1}g_0$$

담당 부분에 관하여 구한다.

5.5 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값 $\mathbf{w}_0$ 의 설정

전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값 $\mathbf{w}_0$ 를 수학식 79에 의해 설정한다.

수학식 79

$$\mathbf{w}_0 = \bar{G}g_0$$

담당 부분에 관하여 구한다.

6. 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법 반복 계산

6.1 전체 자유도의 변위 갱신

n≥1에 대하여, 이하의 수순으로 전체 자유도의 변위 $\mathbf{u}_{n-1}$ 을 갱신한다.

6.1.1 $K\mathbf{w}_{n-1}$ 의 계산

$K\mathbf{w}_{n-1}$ 을 담당 부분에 관하여 구한다.

6.1.2 α_n 의 계산

통신을 행하여, 전 노드에서 α_n 을 수학식 80과 같이 구한다.

수학식 80

$$\alpha_n = \frac{\mathbf{g}_{n-1} \cdot \bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_{n-1}}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}_{n-1}}$$

6.1.3 **u** $_{n-1}$ 의 담당 부분의 갱신

수학식 81에 의해 **u** $_{n-1}$ 의 담당 부분을 갱신한다.

수학식 81

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} - \alpha_n \mathbf{w}_{n-1}$$

6.2 전체 자유도의 잔차 갱신

n≥1에 대하여, 전체 자유도의 잔차 **g** $_{n-1}$ 의 담당 부분을 수학식 82에 따라 갱신한다.

수학식 82

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_{n-1} - \alpha_n \mathbf{K}\mathbf{w}_{n-1}$$

6.3 대각 스케일링 전처리 $\mathbf{D}_K^{-1}\mathbf{g}_n$ 의 계산

5.3과 마찬가지로, 잔차 **g** $_n$ 에 대하여 $\mathbf{D}_K^{-1}\mathbf{g}_n$ 을 각 노드에서 담당 부분에 관하여 구한다. (대각 스케일링 전처리).

6.4 전체 자유도의 Coarse Grid 전처리 $\bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_n$ 의 계산

5.4와 동일한 수순으로, $\bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_n$ 을 담당 부분에 관하여 구한다. 즉, 2개의 방정식인 수학식 83 및 수학식 84를 풀어서 수학식 85로 한다.

수학식 83

$$\mathbf{K}_{rgd}\boldsymbol{\mu}^{(W)} = -(\mathbf{NDZ})^T \mathbf{K}\mathbf{D}_K^{-1}\mathbf{g}_n$$

수학식 84

$$\boldsymbol{\mu}_n^{(W)} = \mathbf{NDZ}\boldsymbol{\mu}^{(W)}$$

수학식 85

$$\bar{G}g_n = \mu_n^{(W)} + D_K^{-1} g_n$$

6.5 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 **w** $_{n-1}$ 의 갱신

다음과 같이, **w** $_{n-1}$ 을 갱신한다.

6.5.1 **β** $_n$ 의 계산

β $_n$ 을 수학식 86과 같이, 통신하여 전체 노드에서 구한다.

수학식 86

$$\beta_n = \frac{g_n \cdot \bar{G}g_n}{g_{n-1} \cdot \bar{G}g_{n-1}}$$

6.5.2 **w** $_{n-1}$ 의 갱신

w $_{n-1}$ 을 수학식 87과 같이 담당 부분마다 갱신한다.

수학식 87

$$w_n = \bar{G}g_n + \beta_n w_{n-1}$$

6.6 수속 판정

갱신한 잔차 **g** $_n$ 으로부터 수속을 판정한다. 수속하지 않는 경우에는 6.1로 되돌아가서 그 이후를 재차 실행한다.

7. 변위 해 **u** 의 출력

전처리된 CG법 수속 시점에서의 **u** n을 변위 해 **u** 로 한다. 필요하면 **u** 로부터 변형이나 응력을 구한다. 이 계산 수순은 도 2에 나타내었다.

실시예

이하 실시예에 기초하여, CGCG법이 **DDM** , 병렬 **CG** 법, 및 **BDD** 에 비해, 계산 퍼포먼스가 우수하다는 것을 설명한다. 철도 대차를 모델로 하는 유한 요소법에서의 계산 퍼포먼스를 비교한다. 이 모델에서는 요소가 4면체 1차 요소, 절점수가 323,639, 요소수가 1,123,836, 자유도 수가 970,911(6 자유도만 구속)이며, 계산 환경은 계산기 **Dual Pentium III 600MHz** 4대, PE 수 4(각 머신에 1 프로세스), 계산 조건은 **CG** 법 톨러런스 1.0×10^{-6} 이었다. 계산 퍼포먼스의 비교를 표 1에 나타내었다. 표 1로부터, 다음의 것을 알 수 있다. 즉, **CGCG** 법은 **DDM** 및 병렬 **CG** 법에 비해, 반복 단계 수, 계산 시간 모두 매우 적다. **CGCG** 법은 반복 단계 수에 대해서는 **BDD** 법에 뒤떨어지지만, 계산 속도에 대해서는 **BDD** 법이 3배 가까이 빠르다.

[표 1]

계산 방법	부분 영역수	반복 단계수	계산 시간 (분)	메모리 사용량 (MB／PE)
CGCG 법	1, 600	599	15	167
병렬 CG 법	4	28, 565	201	90
DDM	12, 000	20, 358	377	167
BDD 법	2, 400	293	40	440

<비교예 1>

표 1에는 Neumann 전처리된 DDM 과의 비교는 나타내고 있지 않지만, DDM , 및 Neumann 전처리된 DDM 의 양자의 계산 퍼포먼스를 비교한 계산 비교예가 있다. 비교예의 계산 퍼포먼스를 표 2에 나타내었다. 이 비교예는 복수의 직방체를 조합하여 만든 간이 모델에서, 요소가 4면체 2차 요소, 절점 수가 1,029, 요소 수가 504, 자유도 수가 3,087 (저면을 완전 고정, 상면에 강제 변위)이며, 계산 환경은 계산기 Alpha21164 600MHz 1대, PE 수는 1, 계산 조건은 CG 법에 의해 톨러런스가 1.0×10^{-7} 이었다. 표 2는 DDM 과 Neumann 전처리된 DDM 의 계산 시간과 반복 단계 수를 나타 내고 있다. Neumann 전처리된 DDM 에서 단축된 시간은 13% 정도, 반복 단계 수도 기껏해야 1/2 정도이다. 이 비교예 1과 실시예로부터, 본 발명의 CGCG 법은 초대규모 구조 문제의 해법으로서 종래 알려져 있는 DDM , 병렬 CG 법, Neumann 전처리된 DDM 에 비해, 계산 시간이 매우 짧아서, 고속화 및 로버스트성 향상을 목적으로 하여 개발된 BDD 법과 비교하여도 보다 빠르다. 반복 단계 수에 관해서는 BDD 법에는 뒤떨어지지만, DDM , 병렬 CG 법 및 Neumann 전처리된 DDM 과의 비교에서는 매우 적어지는 것을 알 수 있다. 이와 같이, CGCG 법은 초 구조 문제의 해법으로서 계산 퍼포먼스가 매우 높은 것을 알 수 있다.

[표 2]

계산 방법	부분 영역수	반복 단계수	계산 시간 (초)
DDM	12	420	480
Neumann 전처리 DDM	12	240	420

산업상 이용 가능성

CGCG 법은 대규모의 문제를 유효하게 푸는 유한 요소법 솔브 알고리즘이며, 유한 요소법에 기초하는 해석 일반에 적용 가능하다. 예를 들면, 유한 요소법에 의해 정식화되는 연속체 역학 전반, 고체 역학, 구조 역학, 유체 역학, 열전도 문제, 전자장 문제에 이용할 수 있다. 또한, 유한 요소법은 미분 방정식을 지배(支配) 방정식으로 하는 경계값 문제의 일반적 해법으로 간주되기 때문에, 그 의미에서, CGCG 법은 미분 방정식을 지배 방정식으로 하는 경계값 문제 전반의 해법으로서 적용 가능하다. 어떤 문제에서도, CGCG 법의 적용은 대규모의 문제를 효율적으로 푸는 것에 유효하다. CGCG 법은 대규모의 문제를 푸는 유한 요소법 솔브 알고리즘으로서 종래에서부터 알려져 있는, DDM , 병렬 CG 법 및 Neumann 전처리된 DDM 에 비해 계산 시간이 매우 짧아져서, 계산 반복 단계가 매우 적어진다는 특징을 갖는다.

또한, CGCG법은 계산 시간에 대하여, 고속화를 목적으로 하여 개발된 BDD 법에 비하여도 보다 높은 성능을 나타낸다.

(57) 청구의 범위

청구항 1.

자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템으로서,

영역 분할을 행하는 수단,

부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배하는 수단,

강성(剛性) 매트릭스를 작성하는 수단,

부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단,

전체 자유도의 전처리된 사영(射影) CG법의 초기 설정을 행하는 수단,

전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단, 및

변위 해를 출력하는 수단

을 포함하는 것을 특징으로 하는 병렬 유한 요소법 계산 시스템.

청구항 2.
제1항에 있어서,

상기 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단이, 전체 자유도 표시의 사영자를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 작성하는 수단 및 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 LU 분해하는 수단을 포함하는 것을 특징으로 하는 병렬 유한 요소법 계산 시스템.

청구항 3.
제1항에 있어서,

상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단이, 전체 자유도의 초기 변위를 설정하는 수단, 전체 자유도의 초기 잔차(殘差)를 계산하는 수단, 대각(對角) 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 및 전체 자유도의 **CG** 법 탐색 방향 벡터 초기값을 설정하는 수단을 포함하는 것을 특징으로 하는 병렬 유한 요소법 계산 시스템.

청구항 4.
제1항에 있어서,

상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 반복 계산을 하는 수단이, 전체 자유도의 변위를 갱신하는 수단, 전체 자유도의 잔차를 갱신하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터를 갱신하는 수단 및 수속(收束)을 판정하는 수단을 포함하는 것을 특징으로 하는 병렬 유한 요소법 계산 시스템.

청구항 5.
자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템에서, 영역 분할을 행하는 수단, 부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배하는 수단, 강성 매트릭스를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 **CG** 법의 초기 설정을 행하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 **CG** 법의 반복 계산을 하는 수단, 및 변위 해를 출력하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램.

청구항 6.
제5항에 있어서,

상기 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단을, 전체 자유도 표시의 사영자를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 작성하는 수단 및 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 LU 분해하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램.

청구항 7.
제5항에 있어서,

상기 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단을, 전체 자유도의 초기 변위를 설정하는 수단, 전체 자유도의 초기 잔차(殘差)를 계산하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 및 전체 자유도의 **CG** 법 탐색 방향 벡터 초기값을 설정하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램.

청구항 8.

제5항에 있어서,

상기 전체 자유도의 전처리된 사영 **CG** 법의 반복 계산을 하는 수단을, 전체 자유도의 변위를 갱신하는 수단, 전체 자유도의 잔차를 갱신하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터를 갱신하는 수단 및 수속을 판정하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램.

청구항 9.

자유도 100만 이상의 초대규모 구조 문제를 푸는 병렬 유한 요소법 계산 시스템에서, 영역 분할을 행하는 수단, 부분 영역을 각 프로세서가 담당하는 부분으로 분배하는 수단, 강성 매트릭스를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG법의 초기 설정을 행하는 수단, 전체 자유도의 전처리된 사영 CG 법의 반복 계산을 하는 수단 및 변위 해를 출력하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체.

청구항 10.

제9항에 있어서,

상기 부분 영역 전체 중첩 운동을 설정하는 수단을, 전체 자유도 표시의 사영자를 작성하는 수단, 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 작성하는 수단 및 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스를 LU 분해하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체.

청구항 11.

제9항에 있어서,

상기 전체 자유도의 전처리된 사영 **CG** 법의 초기 설정을 행하는 수단을, 전체 자유도의 초기 변위를 설정하는 수단, 전체 자유도의 초기 잔차를 계산하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단 및 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값을 설정하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체.

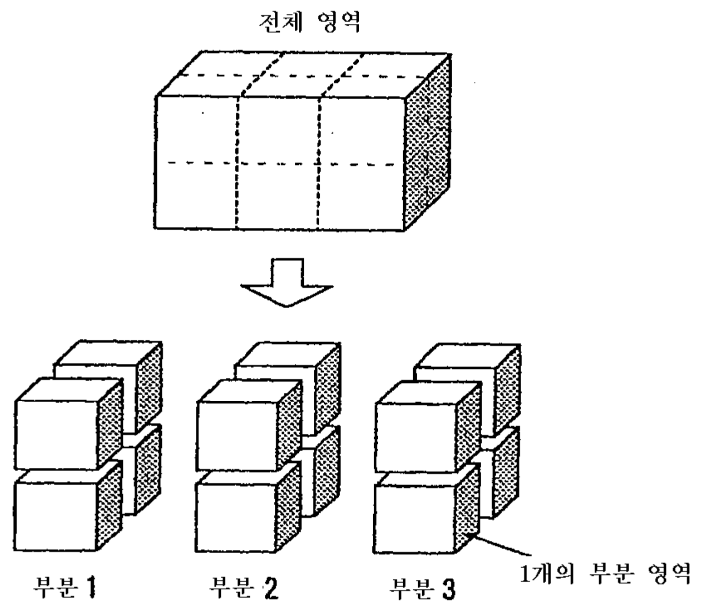
청구항 12.

제9항에 있어서,

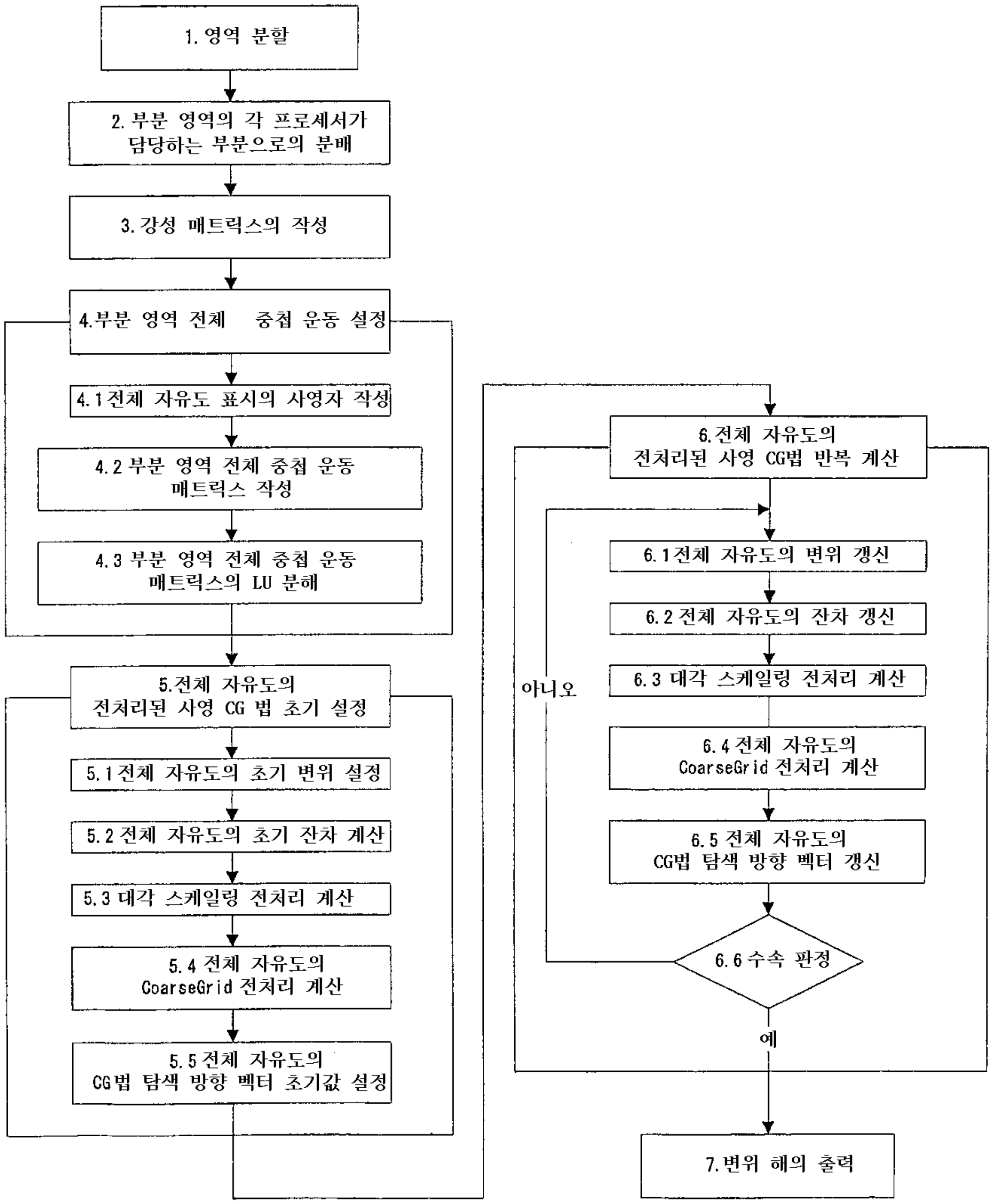
상기 전체 자유도의 전처리된 사영 **CG** 법의 반복 계산을 하는 수단을, 전체 자유도의 변위를 갱신하는 수단, 전체 자유도의 잔차를 갱신하는 수단, 대각 스케일링 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 **COARSE GRID** 전처리 계산을 하는 수단, 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터를 갱신하는 수단 및 수속을 판정하는 수단으로서 기능시키기 위한 병렬 유한 요소법 계산 프로그램을 기록한 컴퓨터 판독 가능한 기록 매체.

도면

도면1



도면2


1. 영역 분할
2. 부분 영역의 각 프로세서가 담당하는 부분으로의 분배
3. 강성 매트릭스의 작성
4.부분 영역 전체 중첩 운동 설정
4.1전체 자유도 표시의 사영자 작성
4.2 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스 작성
4.3 부분 영역 전체 중첩 운동 매트릭스의 LU 분해
5.전체 자유도의 전처리된 사영 CG 법 초기 설정
5.1전체 자유도의 초기 변위 설정
5.2전체 자유도의 초기 잔차 계산
5.3 대각 스케일링 전처리 계산
5.4 전체 자유도의 CoarseGrid 전처리 계산
5.5전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 초기값 설정
6.전체 자유도의 전처리된 사영 CG법 반복 계산
6.1전체 자유도의 변위 갱신
6.2전체 자유도의 잔차 갱신
6.3 대각 스케일링 전처리 계산
6.4 전체 자유도의 CoarseGrid 전처리 계산
6.5 전체 자유도의 CG법 탐색 방향 벡터 갱신
6.6 수속 판정
아니오
예
7.변위 해의 출력