

(51) Int. Cl. ⁷

F I

G 0 6 F 17/13

G 0 1 M 19/00

G 0 6 F 15/16

G 0 6 F 17/50

G 0 6 F 17/13

G 0 1 M 19/00

G 0 6 F 15/16

G 0 6 F 17/50

Z

6 1 0 A

6 1 2 H

審査請求 有 予備審査請求 有 (全27頁)

| | | | |
|------------|--|---------|---|
| 出願番号 | 特願2002-571598(P2002-571598) | (71)出願人 | 599172782 株式会社アライドエンジニアリング 東京都品川区大井1丁目2番17号 |
| (21)国際出願番号 | PCT/JP2002/004617 | (71)出願人 | 503360115 独立行政法人 科学技術振興機構 埼玉県川口市本町4丁目1番8号 |
| (22)国際出願日 | 平成14年5月13日(2002.5.13) | (74)代理人 | 100100402 弁理士 名越 秀夫 |
| (81)指定国 | EP(AT, BE, CH, CY, DE, DK, ES, FI, FR, GB, GR, IE, IT, LU, MC, NL, PT, SE, TR), JP, KR, US | (74)代理人 | 100088214 弁理士 生田 哲郎 |
| | | (72)発明者 | 秋葉 博 東京都品川区大井1丁目2番17号 株式会社アライドエンジニアリング内 |

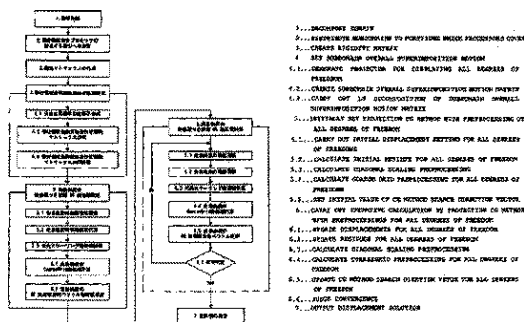
最終頁に続く

(54) 【発明の名称】 並列有限要素法計算システム

(57) 【要約】

超大規模構造問題を解く方法として、領域分割法 (D D M)、Neumann前処理つきDMM、BDD法、並列CG法が知られているが、発散して解が求まらない、計算時間が極めて長くなるという問題がある。本発明は、自由度が百万以上の超大規模構造問題を解く際、解が発散することなく求まり、しかも短時間の計算時間で解が求まる、計算パフォーマンスの高い超大規模構造問題を解くシステムを提供するものである。

自由度100万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであって、領域分割をする手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段を備えたことを特徴とする並列有限要素法計算システムである。また、該システムを機能させるためのプログラム及び該プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体を含む。



【特許請求の範囲】**【請求項 1】**

自由度 100 万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであって、領域分割を行う手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自由度の前処理つき射影 CG 法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影 CG 法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段を備えたことを特徴とする並列有限要素法計算システム。

【請求項 2】

前記部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段が、全自由度表示の射影子を作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを作成する手段及び部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを LU 分解する手段を備えたことを特徴とする請求の範囲 1 に記載の並列有限要素法計算システム。

10

【請求項 3】

前記全自由度の前処理つき射影 CG 法の初期設定を行う手段が、全自由度の初期変位を設定する手段、全自由度の初期残差を計算する手段、対角スケール前処理の計算をする手段、全自由度の COARSE GRID 前処理の計算をする手段及び全自由度の CG 法探索方向のベクトル初期値を設定する手段を備えたことを特徴とする請求の範囲 1 に記載の並列有限要素法計算システム。

【請求項 4】

前記全自由度の前処理つき射影 CG 法の反復計算をする手段が、全自由度の変位を更新する手段、全自由度の残差を更新する手段、対角スケール前処理の計算をする手段、全自由度の COARSE GRID 前処理の計算をする手段、全自由度の CG 法探索方向のベクトルを更新する手段及び収束を判定する手段を備えたことを特徴とする請求の範囲 1 に記載の並列有限要素法計算システム。

20

【請求項 5】

自由度 100 万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであって、領域分割を行う手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自由度の前処理つき射影 CG 法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影 CG 法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段として機能させるための並列有限要素法計算プログラム。

30

【請求項 6】

前記部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段が、全自由度表示の射影子を作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを作成する手段及び部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを LU 分解する手段として機能させるための請求の範囲 5 に記載の並列有限要素法計算プログラム。

【請求項 7】

前記全自由度の前処理つき射影 CG 法の初期設定を行う手段が、全自由度の初期変位を設定する手段、全自由度の初期残差を計算する手段、対角スケール前処理の計算をする手段、全自由度の COARSE GRID 前処理の計算をする手段及び全自由度の CG 法探索方向のベクトル初期値を設定する手段として機能させるための請求の範囲 5 に記載の並列有限要素法計算プログラム。

40

【請求項 8】

前記全自由度の前処理つき射影 CG 法の反復計算をする手段が、全自由度の変位を更新する手段、全自由度の残差を更新する手段、対角スケール前処理の計算をする手段、全自由度の COARSE GRID 前処理の計算をする手段、全自由度の CG 法探索方向のベクトルを更新する手段及び収束を判定する手段として機能させるための請求の範囲 5 に記載の並列有限要素法計算プログラム。

【請求項 9】

50

自由度 100 万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであって、領域分割を行う手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自由度の前処理つき射影 CG 法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影 CG 法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段として機能させるための並列有限要素法計算プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。

【請求項 10】

前記部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段が、全自由度表示の射影子を作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを作成する手段及び部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを LU 分解する手段として機能させるための請求の範囲 9 に記載の並列有限要素法計算プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。 10

【請求項 11】

前記全自由度の前処理つき射影 CG 法の初期設定を行う手段が、全自由度の初期変位を設定する手段、全自由度の初期残差を計算する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度の COARSE GRID 前処理の計算をする手段及び全自由度の CG 法探索方向のベクトル初期値を設定する手段として機能させるための請求の範囲 9 に記載の並列有限要素法計算プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。

【請求項 12】

前記全自由度の前処理つき射影 CG 法の反復計算をする手段が、全自由度の変位を更新する手段、全自由度の残差を更新する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度の COARSE GRID 前処理の計算をする手段、全自由度の CG 法探索方向のベクトルを更新する手段及び収束を判定する手段として機能させるための請求の範囲 9 に記載の並列有限要素法計算プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体。 20

【発明の詳細な説明】

技術分野

本発明は、自由度 100 万以上の超大規模構造問題を効果的に解く、超大規模並列有限要素法ソルバアルゴリズムに関する。並列 CG アルゴリズムを基盤とし、領域分割 (Domain Decomposition) に基づく共役射影勾配法アルゴリズムを取入れたものである。当該アルゴリズムを「CGCG 法」(Coarse Grid CG method, CGCG method) と称する。K を当該構造問題の剛性行列とし、領域分割による部分領域単位の自由度の空間を coarse 空間、それに K - 直交な補空間を fine 空間と称する。CGCG 法は、射影として fine 空間への K - 直交射影を採用した共役射影勾配 (Conjugate Projected Gradient algorithm : 以下射影 CG 法と称する) を並列処理で行なうものである。 30

背景技術

構造問題は、通常次のように扱われる。まず、対象となる構造物を連続体として定式化し、連続体の運動方程式 (静的問題の場合は釣合い方程式) を定める。この方程式はほとんどの場合厳密に解くことが不可能であり、数値解析的に解かざるを得ない。そのための連続体問題の離散近似的再定式法が必要となる。その方法の一つとして有限要素法 (日本機械学会 計算力学ハンドブック (I 有限要素法 構造編) 日本機械学会 1998) がある。有限要素法では、まず連続体の占める空間領域を複数の要素 (有限要素法の要素) に分割し、非ゼロの値をとる領域が各要素に局在した関数 (形状関数) を導入して、連続体変位場をそれらの関数の重ね合わせで表現されるものに限定する近似により、連続体の変位場およびその運動方程式 (あるいは釣合い方程式) を離散化する。この離散化により、方程式は一つ (静的線形問題の場合) あるいは複数 (例えば非線形問題の場合増分ステップ毎、動的問題の場合時間ステップ毎) の線形方程式に帰着される。有限要素法による連続体領域の要素分割の分割数により線形方程式が扱う自由度 (次元) 数が異なり、一般に近似をよくするために分割数を増やせば自由度数は増加し、対応する線形方程式の求解の難易度が高まる。 40

微小変形の静的構造問題は有限要素法においては式 1 のような、有限次元内積ベクトル空 50

間 V 上の線形問題に帰着される。

【式 1】

$$Ku = F$$

ここで、 V は許容変位場（変位場の境界条件を満たすベクトル場）の空間、 K は V の次元 $\dim V$ 次剛性マトリクス（正定値対称）、

u は V の変数ベクトル、 F は外力を表わす $KV \approx V$ の定ベクトルである。 V の次元 $\dim V$ は問題の自由度数と等しい。 V の中から式 1 を満たすベクトル u を探し出すことがソルバの課題になる。

まず、本発明の基盤となる共役射影勾配法（CPG: Conjugate Projected Gradient Algorithm: C. Farhat F. - X. Roux: Implicit Parallel Processing in Structural Mechanics, Computational Mechanics Advances 2, 1-124, 1994）について説明する。一般に有限次元内積ベクトル空間 V 上の線型方程式式 2

【式 2】

$$Ku = F, \quad u, F \in V$$

を考える。 K は正定値対称線形変換である。 V の部分空間 Y を一つ選ぶ。 V を $Y \perp K$ - 直交射影する K - 直交射影子 $P^{(Y)}$,

$KP^{(Y)} = P^{(Y)T}K$ が一意的に決まる。 $P^{(Y)T}$ は $P^{(Y)}$ の転置である。さらに条件 $P^{(Y)} + P^{(a)} = 1$ を満たす K - 直交射影子 $P^{(a)}$ ($P^{(Y)}$ の補射影子)

$KP^{(a)} = P^{(a)T}K$ が一意的に決まり、全空間 V は $P^{(Y)}$ と $P^{(a)}$ の像空間 $Y, V^{(a)}$ へ式 3 と K - 直交直和分解される。

【式 3】

$$V = Y \oplus V^{(a)}, \quad Y \perp_K V^{(a)}, \quad \begin{pmatrix} Y \\ V^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(Y)} \\ P^{(a)} \end{pmatrix} V$$

また、 $P^{(Y)}$ と $P^{(a)}$ の K - 直交性をまとめて書けば式 4 なので、

【式 4】

$$K \begin{pmatrix} P^{(Y)} \\ P^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(Y)T} \\ P^{(a)T} \end{pmatrix} K \quad 30$$

線形方程式式 2 は

【式 5】

$$K \begin{pmatrix} P^{(Y)} \\ P^{(a)} \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} P^{(Y)T} \\ P^{(a)T} \end{pmatrix} F$$

式 5 と分解され、 F の KY -成分 $P^{(Y)T}F$ と $KV^{(a)}$ -成分 $P^{(a)T}F$ 、あるいは u の Y -成分 $P^{(Y)}u$ と $V^{(a)}$ -成分 $P^{(a)}u$ は独立に扱えることになる。つまり方程式式 2 は独立な 2 つの方程式式 6、式 7 に式 8 と K - 直交直和分離される。便宜のため、以下 Y を直接法空間、 Y の K - 直交補空間となる $V^{(a)}$ を反復法空間と称する。

【式 6】

$$Ku^{(Y)} = F_{(Y)}, \quad u^{(Y)} \in Y, \quad F_{(Y)} \in KY$$

【式 7】

$$Ku^{(a)} = F_{(a)}, \quad u^{(a)} \in V^{(a)}, \quad F_{(a)} \in KV^{(a)}$$

【式 8】

$$u = u^{(a)} + u^{(Y)}, \quad F = F_{(a)} + F_{(Y)}$$

直接法空間 Y の部分空間 W を特別に設定することを考える。この W を以下 coarse 空間と称する。 W の K - 直交補空間を fine 空間と称する。 Y を W と W の K - 直交補空間

W^c に K - 直交直和分解すれば、方程式式 6 と同様に W 上の方程式式 9

【式 9】

$$\mathbf{u}^{(W)} \in W : \mathbf{K}\mathbf{u}^{(W)} = \mathbf{F}_{(W)}, \quad \mathbf{F}_{(W)} \equiv \mathbf{P}^{(W)\top} \mathbf{F} \in \mathbf{P}^{(W)\top} \mathbf{V} = \mathbf{K}\mathbf{W}$$

が設定される。ここで $\mathbf{P}^{(W)}$ は W への K - 直交射影子である。こ

の方程式は coarse grid 問題と称される。 W がその基底 $\{\mathbf{e}_j^{(W)}\}_j$ の

設定により定義されている場合、式 9 は具体的に式 10 と定式化される。

【式 10】

$$\mathbf{u}^{(W)} = \mathbf{e}_j^{(W)} \mathbf{u}^j, \quad \mathbf{K}_{ij}^{(W)} \mathbf{u}^j = \mathbf{F}_i$$

10

ここで、式 11 と定義する。

【式 11】

$$\mathbf{K}_{ij}^{(W)} \equiv \mathbf{e}_i^{(W)} \cdot \mathbf{K} \mathbf{e}_j^{(W)}, \quad \mathbf{F}_i \equiv \mathbf{e}_i^{(W)} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{e}_i^{(W)} \cdot \mathbf{F}_{(W)}$$

$\mathbf{K}_{ij}^{(W)}$ は coarse grid マトリクスと呼ばれる。第二式の等号は W と

fine 空間 $W^c \oplus_K V^{(a)}$ の K による像空間 $K(W^c \oplus_K V^{(a)})$ とが直交す

ることからくる。

K - 直交直和分解した方程式のうち式 6 を直接法で、式 7 を反復法で解くことを考える。 20
方程式式 7 に反復法を適用すると第 n ステップ反復式が式 12、式 13 と書ける。

【式 12】

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_n^{(a)} + \mathbf{r}_{(a)n} = \mathbf{F}_{(a)}, \quad \mathbf{u}_n^{(a)} \in V^{(a)}, \quad \mathbf{F}_{(a)} \in \mathbf{K}V^{(a)}$$

【式 13】

$$\mathbf{r}_{(a)n} \equiv \mathbf{F}_{(a)} - \mathbf{K}\mathbf{u}_n^{(a)}, \quad \mathbf{u}_n \equiv \mathbf{u}^{(Y)} + \mathbf{u}_n^{(a)}$$

$\mathbf{r}_{(a)n}$ は第 n ステップの残差である。 $\mathbf{r}_{(a)n} \in \mathbf{K}V^{(a)}$ である。反復法として

$\mathbf{P}^{(a)}\mathbf{G}\mathbf{P}^{(a)\top}$ (G は対称) を前処理行列にもつ前処理つき CG 法 :

$\mathbf{P}^{(a)}\mathbf{G}\mathbf{P}^{(a)\top}$ - CG 法、式 14 ~ 式 16 を採用する。 30

【式 14】

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{P}^{(a)}\mathbf{G}\mathbf{r}_{(a)0} \in V^{(a)}$$

【式 15】

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(a)} = \mathbf{u}_n^{(a)} + \alpha_n \mathbf{p}_n, \quad \mathbf{r}_{(a)n+1} = \mathbf{r}_{(a)n} - \alpha_n \mathbf{K}\mathbf{p}_n, \quad \alpha_n \equiv \frac{\mathbf{r}_{(a)n} \cdot \mathbf{G}\mathbf{r}_{(a)n}}{\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{K}\mathbf{p}_n}$$

【式 16】

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{P}^{(a)}\mathbf{G}\mathbf{r}_{(a)n+1} + \beta_n \mathbf{p}_n, \quad \beta_n \equiv \frac{\mathbf{r}_{(a)n+1} \cdot \mathbf{G}\mathbf{r}_{(a)n+1}}{\mathbf{r}_{(a)n} \cdot \mathbf{G}\mathbf{r}_{(a)n}}$$

40

ここで、 \mathbf{p}_n は $\mathbf{P}^{(a)}\mathbf{G}\mathbf{P}^{(a)\top}$ - CG 法探索方向ベクトルである。 $\mathbf{P}^{(a)\top} \mathbf{r}_{(a)n} = \mathbf{r}_{(a)n}$

$\mathbf{K}V^{(a)}$ に注意。このように、 K - 直交直和分解した方程式のうち片方について前処理つき CG 法で解く方法を共役射影勾配法 (CPG 法) と称する。もう片方の方程式を直接法で解くことも含めて、便宜上以下、これを射影 CG 法と称する。

部分空間 $W \oplus_K V^{(a)}$ への K - 直交射影子を $\mathbf{P}^{(W+a)}$ と記す。 $\mathbf{P}^{(a)}$ そのものを直接計算することは不可能だが、 $\mathbf{P}^{(W+a)}$ は計算可能で W の

基底 $\{e_j^{(W)}\}_j$ が与えられている場合を考える。その場合は式 14、

式 16 での前処理 $P^{(a)}Gr_{(a)n}$ の計算は次のように行なう。 $P^{(a)}Gr_{(a)n}$ は

式 17 と書いて、

【式 17】

$$P^{(a)}Gr_{(a)n} = P^{(W+a)}Gr_{(a)n} - \mu_n^{(W)}, \quad K\mu_n^{(W)} = P^{(W)T}KGr_{(a)n}$$

式 4 から $\mu_n^{(W)} \in W$ がわかる。そこで、前処理計算 $P^{(a)}Gr_{(a)n}$ を coarse

10

grid 問題式 18 に帰着させる。

【式 18】

$$\mu_n^{(W)} \in W : K\mu_n^{(W)} = P^{(W)T}KGr_{(a)n}$$

coarse grid 問題は式 10 の手順にしたがって解くことができる。

C G C G 法の特徴づけのため、既存の有限要素法並列ソルバアルゴリズム D D M、B D D 法、並列 C G 法を説明する。以下に述べるとおり、領域分割に基づいた既存の有限要素法並列ソルバアルゴリズム D D M、B D D 法は、K - 直交直和分解法に基づいた射影 C G 法の一つとみなせる。以下、有限要素法にしたがい定式化された構造問題の全自由度の空間を V とし、解くべき線形方程式を式 19 とする。

20

【式 19】

$$Ku = F, \quad u, F \in V$$

ここで、K は剛性マトリクスと呼ばれる。

超大規模な（自由度が 100 万程度以上の）問題を効率的に（特に並列処理で）解くことを目的に考案された方法の一つとして領域分割法（D D M : Domain Decomposition Method）がある。有限要素法により分割された各要素を互いに隣接するもの同士で適当にグループ分けする。各グループの占める空間領域を部分領域（subdomain）と称する（第 1 図参照）。これにより、全領域がまず部分領域へ分割され、次に各部分領域の有限要素へ分割されるという具合に空間が階層的に分割離散化されることになる。これにしたがい、領域全体に関する処理が各部分領域ごとの処理と部分領域間の処理の 2 段階に分けられる。特に各部分領域ごとの処理は並列に行なうことができる。上記の処理の 2 段階分離は具体的には、領域全体の変位場を、部分領域内部に働く外力に応答する部分領域内部の変位場と、部分領域間の境界（内部境界と呼ぶ）上に働く外力に応答する残りの変位場に分けて別々に処理することにより実現している。後者の変位場はさらに部分領域内部の変位場と内部境界上の変位場に分けられ、前者は後者の従属変数になる。独立変数である内部境界の自由度については C G 法により解く。内部境界について解けば、部分領域内部の変位場はその境界上の変位を境界条件とし負荷ゼロの変位場として定まる。

30

詳しく述べると、先ず構造物の占める空間領域全体 $\bar{\Omega}$ をその境

界 Γ 、部分領域内部全部の合併領域 $\bar{\Omega}_i$ および内部境界 Γ_s に分け

40

る。 Γ と Γ_s は一部重複する。 $\bar{\Omega}$ 上の許容変位場の自由度空間が

全自由度空間 V を成す。規格直交基底として形状関数列 $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ を

とることで V に内積を定義する。この内積は $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ に依存し、離

散化の方法により変わる計算の便宜上設定されるものであり、物理

的あるいは客観的意味はない。領域 $\bar{\Omega}_i - \Gamma_s$ は Ω_i を含む。 $\bar{\Omega}_i - \Gamma_s$ 上の許容変位場の自由度の空間 V^i と内部境界 Γ_s 上の許容変位場の自由度の空間 V^s 直交し、全自由度空間 V は式 20 のように V^i と V^s に直交直和分解する。

【式 20】

50

$$V = V_i \oplus V_s, \quad V_i \perp V_s$$

この直和分解に基づき V 上の正定値対称線形変換 K は $K = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{pmatrix}$

とブロック分解されるが、これに基づき式 2 1 とブロック対角化する。

【式 2 1】

$$K = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & K_{si}K_{ii}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii} & \\ & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

S は Schur の補元と呼ばれる。射影子 $P^{(i)}$, $P^{(s)}$ を式 2 2 と定義する。

【式 2 2】

$$P^{(i)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(s)} \equiv 1 - P^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$P^{(s)}$ は内部境界 s 上の変位場を、それを境界条件とし外力を受け

ない $\bar{\Omega} - \Gamma_s$ 上の変位場に対応づける。定義から式 2 3、式 2 4 であるから、

【式 2 3】

$$KP^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & K_{si}K_{ii}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{ii} & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K_{ii}^{-1}K_{is} \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{ii} & K_{is} \\ K_{si} & K_{si}K_{ii}^{-1}K_{is} \end{pmatrix}$$

20

【式 2 4】

$$KP^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix}$$

式 2 5 となり、

【式 2 5】

$$K \begin{pmatrix} P^{(i)} \\ P^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(i)T} \\ P^{(s)T} \end{pmatrix} K$$

30

$P^{(i)}$, $P^{(s)}$ は条件 $P^{(i)} + P^{(s)} = 1$ を満たす K - 直交射影子である。特に、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ S \end{pmatrix} = P^{(s)T} KP^{(s)} \text{ に注意。したがってこれら射影子により、} V \text{ が}$$

式 2 6 と

【式 2 6】

$$V = V^{(i)} \oplus V^{(s)}, \quad V^{(i)} \perp_K V^{(s)}, \quad V^{(i)} \equiv P^{(i)}V, \quad V^{(s)} \equiv P^{(s)}V$$

K - 直交直和分解される。 (V^i, V^s) と $(V^{(i)}, V^{(s)})$ の関係は式 2 7 である。

【式 2 7】

$$V^{(i)} = V^i, \quad KV^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 \\ SV^s \end{pmatrix}, \quad V^{(s)} = P^{(s)}V^s = \begin{pmatrix} -K_{ii}^{-1}K_{is} \\ 1 \end{pmatrix} V^s$$

40

$V^{(s)}$ については次のことがわかる。まず第 2 式は $V^{(s)}$ が $\bar{\Omega} - \Gamma_s$ 上の反力がゼロであるような変位場の空間であることを示している。一方第 3 式は、 $V^{(s)}$ が s 上の変位場を幾何的境界条件として持つ

$\bar{\Omega}$ 上の変位場の空間であることを示しており、これら $V^{(s)}$ についての 2 つの特徴づけは等価である。また、射影子 $P^{(s)}$ の固有値 0 に属する固有空間すなわち $\ker P^{(s)}$ について $\ker P^{(s)} = V^{(i)} = V^i$ だから V^s と $V^{(s)}$ は線形同型である。したがって $P^{(s)}$ の V^s への制限 $V^s \rightarrow V^{(s)}$ は線形同型であるこ

50

とがわかる。このことは、 $V^{(s)}$ が変数空間である場合、代わりに V^s を変数空間にとることができることを示している。

空間及び方程式の K - 直交直和分解の直接法空間 Y と反復法空間 $V^{(a)}$ を式 28 とおき、

【式 28】

$$Y = V^{(i)}, \quad V^{(a)} = V^{(s)}$$

式 14 ~ 式 16 の前処理行列 G を単位行列 $G = 1$ ととって射影 CG 法 (J . Mandel , M . Brezina : Balancing Domain Decomposition : Theory and Performance in two and Three Dimensions , MGNET , <http://casper.cs.yale.edu/mgnet/www/mgnet-papers.html>) を適用したも

のが領域分割法 (DDM) である。 $V^{(i)}$ は $\bar{\Omega} - \Gamma_s$ 上の許容変位場の自由度の空間、 $V^{(s)}$ は s 上の許容変位場とそれを境界条件 (正確には変位拘束条件) としてもつ $\bar{\Omega}$ 上の外力を受けない変位場の自由度の空間を表わす。 $K V^{(s)}$ は $V^{(s)}$ の変位場に対応する内部境界上の反力の自由度の空間である。通常の DDM アルゴリズムは上記にしたがい $V^{(s)}$ の代わりに V^s を変数空間にとる。

単位行列以外の G を設定することにより前処理つき DDM も可能

$$\text{である。一般の前処理行列 } G \text{ に関して、 } G \cong S^- \equiv \begin{pmatrix} 0 & \\ & S^{-1} \end{pmatrix} = P^{(s)} K^{-1} P^{(s)T} \text{ の}$$

とき前処理として有効であるといえる。

DDM の CG 法に用いる前処理として、Neumann 前処理 (P . Le Tallec : Domain decomposition methods in computational mechanics , Computational Mechanics Advances 1 (2) (1994) 121 - 220) がある。これは上記の前処理行列 G を単位行列 1 ではなく Neumann 前処理行列にとったものである。Neumann 前処理行列は各部分領域 I の局所剛性マトリクス K^I の Schur 補元 S^I (局所 Schur 補元と呼ばれる) の一般逆行列 S^{I-} を使って式 24 に相当するブロック分解表示で式 29 で定義される。

【式 29】

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \sum_I N^I D^I S^{I-} D^{IT} N^{IT} \end{pmatrix}$$

ここで、 I は領域分割による部分領域のインデックス、 N^I は部分領域 I の自由度を領域全体の自由度へ写像する 0 - 1 成分行列、 $\{ D^I \}_I$ は

$$1 \text{ の各部分領域への分解行列の集合 } 1 = \sum_I N^I D^I N^{IT} \text{ である。この前処}$$

理は、一般逆行列 S^{I-} の選び方によっては条件 $G \cong S^-$ を満たさない可能性がある。

DDM に Neumann 前処理を適用すると、 S^{I-} の選び方の任意性によって部分領域ごとの不定の剛体変位が反復処理ごとに混入する。これは部分領域ごとにばらばらの浮遊運動を生じさせ、反復収束効

率を悪化させる原因となる。前節で述べた、条件 $G \cong S^-$ を満たさない

原因でもある。BDD 法 (Balancing Domain Decomposition method , J . Mandel : Balancing Domain Decomposition , Communications on Numerical Methods in Engineering 9 (1993) 233 - 341 . , J . M

andel, M. Brezina: Balancing Domain Decomposition: Theory and Performance in Two and Three Dimensions, MGNNet, <http://casper.cs.yale.edu/mgnnet/www/mgnnet-papers.html>, ARASOL An Integrated Programming Environment for Parallel Sparse Matrix Solvers (Project No. 20160), Deliverable D 2.4e Final report Domain Decomposition Algorithms for Large Scale Industrial Finite Element Problems, July 30, 1999.) は DDM に基づき、内部境界上の
 10 変位について前処理つき CG 法を用いて解く解法であり、特に線形材料微小変形の静的問題に関しては、内部境界上に働く外力に
 応答する変位場を部分領域ごとの剛体変位と残りのひずみ変位とに分け、前者の自由度だけ先に直接法で解き、後者の自由度を次の前処理
 付き CG 法で解くものである。つまり、Neumann 前処理に、先に解いた部分領域ごとの剛体変位の自由度の混入を排する射影を反復ごとに追加する。もう少し詳しく述べると、この射影は部分領域にでたらめな浮遊運動を生じさせるような外力を削除するという形で行なわれ、K - 直交直和分解された方程式式 7、式 8 でいうと $F = F(a)$ の対応、射影 CG 法アルゴリズムでいえば残差の射影 $r = r(a)$ である。このように、Neumann 前処理つき DDM を改善して部分領域ごとの浮遊運動を押さえる上記の射影処理を *balancing* と称する。
 20

具体的には、DDM における部分空間 $V^{(s)} = P^{(s)} V^s$ をさらに次のように K - 直交直和分解する。 $\ker S^T$ を含む部分空間の I にわたる和空間、例えば部分領域ごとの剛体変位を部分領域全部について重ね合わせた運動を考え、その自由度の空間を coarse 空間 W とする。W は $V^{(s)}$ の部分空間である。 $V^{(s)}$ を W とその $V^{(s)}$ での K - 直交補空間 $V^{(t)}$ に K - 直交直和分解する。対応する K - 直交射影のペアを $P^{(W)}$, $P^{(t)}$ とする。式 30 が成立する。

【式 30】

$$P^{(s)} = P^{(W)} + P^{(t)}, \quad K \begin{pmatrix} P^{(W)} \\ P^{(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(W)T} \\ P^{(t)T} \end{pmatrix} K$$

30

全自由度空間 V は式 31、式 32 と K - 直交直和分解される。

【式 31】

$$V = V^{(i)} \oplus W \oplus V^{(t)}, \quad V^{(i)} \perp_K W, \quad V^{(i)} \perp_K V^{(a)}, \quad W \perp_K V^{(t)}$$

【式 32】

$$W = P^{(W)} V, \quad V^{(t)} = P^{(t)} V$$

空間及び方程式の K - 直交直和分解の直接法空間と反復法空間を式 33 とし、

【式 33】

$$Y = V^{(i)} \oplus_K W, \quad V^{(a)} = V^{(t)}$$

式 14 ~ 式 16 の前処理行列 G を Neumann 前処理行列にとって射影 CG 法 (J. Mandel, M. Brezina: Balancing Domain Decomposition: Theory and Performance in Two and Three Dimensions, MGNNet, <http://casper.cs.yale.edu/mgnnet/www/mgnnet-papers.html>) を適用したものが BDD 法である。特に、式 17、式 18 に相当する前処理は $P^{(W+a)} = P^{(s)}$ であることから式 34、式 35 となる。

40

【式 34】

$$P^{(a)} Gr_{(a)n} = P^{(s)} Gr_{(a)n} - \mu_n^{(W)}$$

【式 35】

$$\mu_n^{(W)} \in W : K\mu_n^{(W)} = P^{(W)T} KGr_{(a)_n}$$

射影処理 $Gr_{(a)_n} \rightarrow P^{(s)}Gr_{(a)_n}$ の計算は 式 2 2 をそのまま計算する。

B D D 法の反復法空間 $V^{(t)}$ は同時に、後に局所 coarse 空間の W^T の定義のところで一緒に定義される balanced 空間でもある。

balanced 空間の像空間 $SV^{(a)}$ への K^{-1} -直交射影 $r_{(a)_n} \in SV^s \rightarrow$

$P^{(a)T} r_{(a)_n} \in SV^{(a)}$ を **balancing** と称する (J. Mandel: **Balancing Domain**

10

Decomposition, Communications on Numerical Methods in Engineering 9 (1993) 233 - 341. , J. Mandel, M. Brezina: **Balancing Domain Decomposition: Theory and Performance in Two and Three Dimensions**, MGN et, <http://casper.ccs.yale.edu/mgnet/www/mgnet-papers.html>。Balancing は B D D 法に適用した射影 C G 法のアルゴリズム式 1 4 ~ 式 1 6 には直接現われず、K -

直交射影 $Gr_{(a)_n} \in V^s \subset V \rightarrow P^{(a)}Gr_{(a)_n} \in V^{(a)}$ 式 1 4、式 1 6 がそれに対応

する。D D M の場合と対照的に B D D 法の場合は、 G は $G \neq S^-$ であつ

20

ても $P^{(a)}GP^{(a)T} \cong P^{(a)}S^-P^{(a)T} = P^{(a)}K^{-1}P^{(a)T}$ であれば前処理として有効である。Neumann 前処理行列式 2 9 はこの条件を満たし、本節冒頭で提示した Neumann 前処理つき D D M の問題点が解決する。

並列 C G 法は領域分割を行わず、全自由度空間 V をそのまま C G 法で処理する。 V の K -直交直和分解も行なわない。直接法空間を $Y = \{0\}$ ととることに相当する。問題が大規模で、ベクトル空間 V の次元が大きい場合は、解析対象の空間領域を幾つかに分割し(これを部分(part)と称する)、それに伴う V の分解(境界の重複した分解)にしたがって各々の部分空間についての自由度を別々のプロセッサが処理する。ベクトルの内積や行列-ベクトル積のように部分空間相互の情報交換が必要な計算を行なうときに限り

30

プロセス間通信が必要になる。以上、超大規模構造問題を解く方法として、領域分割法(D D M: Domain Decomposition Method)、Neumann 前処理法つき D D M、B D D 法(Balancing Domain Decomposition Method)、並列 C G 法の解法について説明した。しかし、これらの方法では、超大規模構造問題を解く場合、発散して解が求まらない、計算時間が極めて長くなるという問題が指摘されている。本発明は、このような状況に鑑みてなされたもので、自由度が 1 0 0 万以上の超大規模構造問題を解く際、解が発散することなく求まり、反復計算の回数が少なく、短時間の計算時間で解が求まる、超大規模構造問題を解くシステム C G C G 法を提供しようとするものである。

40

発明の開示

本発明は、超大規模構造問題を解くシステム、該システムを機能させるためのプログラム及び該プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体を含むものである。C G C G 法は、領域分割を行ない、それに基づいて部分領域の内部と境界の区別をすることなしに coarse 空間を設定し、前処理として簡便な対角スケールリングを採用した前処理つき射影 C G 法を用いる、超大規模構造問題のための有限要素法ソルバルゴリズムである。

本発明は、自由度 1 0 0 万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであつて、領域分割を行う手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自

50

由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段を備えたことを特徴とする並列有限要素法計算システムである。

また、前記部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段が、全自由度表示の射影子を作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを作成する手段及び部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスをLU分解する手段を備えることができる。

前記全自由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段が、全自由度の初期変位を設定する手段、全自由度の初期残差を計算する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度のCOARSE GRID前処理の計算をする手段及び全自由度のCG法探索方向のベクトル初期値を設定する手段を備えることができる。

10

そして、前記全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段が、全自由度の変位を更新する手段、全自由度の残差を更新する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度のCOARSE GRID前処理の計算をする手段、全自由度のCG法探索方向のベクトルを更新する手段及び収束を判定する手段を備えることができる。

本発明は、上記システムを機能させるプログラムでもある。即ち、自由度100万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであって、領域分割を行う手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段として機能させるための並列有限要素法計算プログラムである。そして、前記部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段が、全自由度表示の射影子を作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを作成する手段及び部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスをLU分解する手段として機能させることができ、前記全自由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段が、全自由度の初期変位を設定する手段、全自由度の初期残差を計算する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度のCOARSE GRID前処理の計算をする手段及び全自由度のCG法探索方向のベクトル初期値を設定する手段として機能させることができ、前記全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段が、全自由度の変位を更新する手段、全自由度の残差を更新する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度のCOARSE GRID前処理の計算をする手段、全自由度のCG法探索方向のベクトルを更新する手段及び収束を判定する手段として機能させることができる。

20

30

また、本発明は、上記システムを機能させるプログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体でもある。即ち、

自由度100万以上の超大規模構造問題を解く並列有限要素法計算システムであって、領域分割を行う手段、部分領域を各プロセッサの担当する部分へ分配する手段、剛性マトリックスを作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段、全自由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段、全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段及び変位解を出力する手段として機能させるための並列有限要素法計算プログラムを記録したコンピュータ読み取り可能な記録媒体であり、前記部分領域全体重ね合わせ運動を設定する手段が、全自由度表示の射影子を作成する手段、部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスを作成する手段及び部分領域全体重ね合わせ運動マトリックスをLU分解する手段として機能させることができ、前記全自由度の前処理つき射影CG法の初期設定を行う手段が、全自由度の初期変位を設定する手段、全自由度の初期残差を計算する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度のCOARSE GRID前処理の計算をする手段及び全自由度のCG法探索方向のベクトル初期値を設定する手段として機能させることができ、前記全自由度の前処理つき射影CG法の反復計算をする手段が、全自由度の変位を更新する手段、全自由度の残差を更新する手段、対角スケーリング前処理の計算をする手段、全自由度のCOARSE GRID前処理の計算をする手段、全自由度のCG法探索方向のベクトルを更新する手段及び収束を判定する手段として機能させることができる。

40

50

発明を実施するための最良の形態

C G C G 法は、領域分割を行ない、それに基づいて部分領域の内部と境界の区別をすることなしに coarse 空間を設定し、前処理として簡便な対角スケールリングを採用した前処理つき射影 C G 法を用いる、超大規模構造問題のための有限要素法ソルバアルゴリズムである。D D M、B D D 法と同様、C G C G 法は領域分割に基づいた射影 C G 法を基盤とする。まず $Y = W$ ととり、射影 C G 法で式 3 に倣って全自由度空間 V を式 3 6

【式 3 6】

$$V = W \oplus V^{(a)}, \quad W \perp_K V^{(a)}, \quad \begin{pmatrix} W \\ V^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(W)} \\ P^{(a)} \end{pmatrix} V$$

10

と K -直交分解する。この際、coarse 空間 W として V のどの部分空間を選ぶかが問題になる。C G C G 法では、 W として領域分割における部分領域ごとのある限定された運動（例えば剛体運動）を表わす V の部分空間を選ぶ。

例えば W として B D D 法と同様に、部分領域ごとの剛体変位を部分領域全部について重ね合わせた運動の自由度の空間を採用した場合、 $V^{(a)}$ は部分領域内部のひずみ運動を表わす変位場の空間を成す。つまり B D D 法の設定式 3 3 と比較して直接法空間と反復法空間を式 3 7 ととることになる。

【式 3 7】

$$Y = W, \quad V^{(a)} = V^{(i)} \oplus V^{(t)}, \quad V^{(i)} \perp_K V^{(t)}$$

この場合、B D D 法が $V^{(i)}$ の自由度については直接法で解くのに対し、C G C G 法ではそれも含めて C G 法で解く。この意味で、C G C G 法の方が B D D 法より C G 法の負担が重く直接法の負担が軽い。射影 C G 法前処理でも C G C G 法では B D D 法における式 3 4 の射影

20

処理 $Gr_{(a)_n} \rightarrow P^{(s)}Gr_{(a)_n}$ のない分直接法の役割が少ない。

Coarse 空間 W の実装面での取扱いも D D M 法と並列 C G 法の相違を反映して次のように異なってくる。D D M 法では、 V^s を変数空間にとるため、領域全体の変位場を部分領域内の変位と内部境界上の変位に分けて扱う。並列 C G 法では、部分領域をその内部と内部境界とに分けることをせず、部分領域はその内部と境界を一体として扱う。B D D 法での coarse 空間 W は次のように設定される。各部分領域の境界（内部境界の一部）の剛体変位を先に定式化し、その部分領域全部にわたる重ね合わせの空間 W^s を設定する。それを式 2 2 の $P^{(s)}$ で K -直交射影して部分領域内の剛体変位に拡張して W とする ($W = P^{(s)} W^s$)。一方、C G C G 法での coarse 空間 W は、各部分領域ごとにその内部と境界全体の剛体変位を直接定式化してその部分領域全部にわたる重ね合わせで設定する。これにしたがい、射影 C G 法の前処理では、空間 W^s の自由度の求解のほかに部分領域ごとの直接法処理の手間が掛かっている (Shur 補元の計算のため) B D D 法に対し、C G C G 法では、その内部も含めた部分領域ごとの剛体変位の自由度について解くだけでよい。

30

方程式式 1 を式 6 ~ 式 8 に倣って式 3 8、式 3 9、式 4 0

【式 3 8】

$$Ku^{(W)} = F_{(W)}, \quad u^{(W)} \in W, \quad F_{(W)} \in KW$$

40

【式 3 9】

$$Ku^{(a)} = F_{(a)}, \quad u^{(a)} \in V^{(a)}, \quad F_{(a)} \in KV^{(a)}$$

【式 4 0】

$$u = u^{(a)} + u^{(W)}, \quad F = F_{(a)} + F_{(W)}$$

と分解する。式 3 8 は変位場 W -成分 $u^{(W)}$ を決定する coarse grid 問題、式 3 9 は変位場 $V^{(a)}$ -成分 $u^{(a)}$ を決定する方程式である。C G C G 法では射影 C G 法に倣って式 3 8 を直接法である修正コレスキー法、式 3 9 を射影 C G 法の前処理つき C G 反復処理で解く。前処理つき

C G 反復処理の前処理行列 \bar{G} は式 1 4 ~ 式 1 6 で $G = D_K^{-1}$ と選んで式

4 1

【式 4 1】

$$\bar{G} = P^{(a)} D_K^{-1} P^{(a)T}$$

と設定する。ここで、 D_K^{-1} は D_K の逆行列、 D_K は K の対角行列（対角成分が K の対角成分と等しい対角行列）である。残差 $r_{(a)n} \in KV^{(a)}$ への

作用は実質的には $\bar{G} r_{(a)n} = P^{(a)} D_K^{-1} r_{(a)n}$ すなわち、CGCG法の前処理は

K の対角スケールと反復法空間 $V^{(a)}$ への K - 直交射影 $P^{(a)}$ の合成である。

BDD法ではNeumann前処理という、各部分領域で局所Schur

補元 S^I の一般逆行列 S^{IT} の計算を行なうという重い前処理を行なうの

に対し、CGCG法では対角スケールという、簡便な前処理で計算コストとメモリ使用量を大幅に削減している。

CGCG法での K - 直交分解式 3 6 における coarse 空間 W の定義を述べる。 I を領域分割による部分領域のインデクスとする。部分領域 I 内の自由度が成すベクトル空間を V^I とする。 V^I の部分空間 W^I を定める。これを局所 coarse 空間と呼ぶことにする。 coarse 空間 W を $\{W^I\}_I$ の重み付き重ね合わせで式 4 2 を定義する。

【式 4 2】

$$W \equiv \text{span} \left\{ N^I D^I W^I \right\}_I = \bigoplus_I N^I D^I W^I$$

ここで、 $\{D^I\}_I$ は Neumann 前処理と同様 1 の各部分領域への分解

$$1 = \sum_I N^I D^I N^{IT}$$

である。 W^I は部分領域 I の規定された運動（例えば剛

体運動）を表わす変位場の空間である。 $m^I = \dim W^I$ を W^I の次元、

$$\{Z_j^I\}_{j=1, L, m^I}$$

を W^I の基底とする。

【式 4 3】

$$\{N^I D^I Z_j^I\}_{j=1, L, m^I_I}$$

式 4 3 は、 W の基底を成し、 W の次元は $\sum_I m^I$ である。

特に、 W^I が条件 $\ker S^I \cap W^I$ を満たすとき、対応する fine 空間の部分空間を balanced 空間と称する。 BDD法では、 Neumann 前処理を行なうため、 W^I は $\ker S^I \cap W^I$ を満たす必要があるが CGCG法ではそのような制約がない。すなわち CGCG法の反復法空間 $V^{(a)}$ は balanced 空間である必要がない。

部分領域 I の規定された運動として剛体運動を考える。このとき W^I は具体的には次のように構成できる。部分領域 I の剛体運動は次の

ように表現できる。 X_α^I を部分領域 I 上の節点 α の初期座標、 x_α^I を変形後の座標として、式 4 4、式 1 5、式 4 5 となる。

【式 4 4】

$$x_\alpha^I = P_j v^j + e^{O_j^{\theta j}} X_\alpha^I$$

【式 4 5】

$$P_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

【式 4 6】

10

20

40

$$O_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 \equiv \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & \end{pmatrix}, \quad O_3 \equiv \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

微小変形を考えると、式 4 7、式 4 8 である。

【式 4 7】

$$\mathbf{x}_\alpha^I \cong \mathbf{P}_j \mathbf{v}^j + (1 + \mathbf{O}_j \theta^j) \mathbf{X}_\alpha^I$$

【式 4 8】

$$\mathbf{u}_\alpha^I \cong \mathbf{P}_j \mathbf{v}^j + \mathbf{O}_j \mathbf{X}_\alpha^I \theta^j = \mathbf{v} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}_\alpha^I, \quad \mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} \quad 10$$

そこで W^I を、次の条件で定義される部分領域 I 上の 6 つの変位場

$\{Z_j^I\}_{j=1,L,6}$ を基底とする、6 次元ベクトル空間で定義する。即ち、式 4 9、式 5 0 である。

【式 4 9】

$$\begin{aligned} Z_j^I &: Z_j^I(\mathbf{X}_\alpha^I) = \mathbf{P}_j \\ Z_{3+j}^I &: Z_{3+j}^I(\mathbf{X}_\alpha^I) = \mathbf{O}_j \mathbf{X}_\alpha^I, \quad j=1,2,3 \end{aligned}$$

【式 5 0】

$$W^I \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{m^I} Z_j^I \mu^j \mid \mu^j \in \mathbf{R} \right\}, \quad m^I \leq 6 \quad 20$$

ただし、式 5 0 では次の事情を考慮している。部分領域によっては、

その剛体運動の自由度が 5 以下の場合があり得る。その場合は Z_j^I の番号 j を振り直し、その基底が $\{Z_j^I\}_{j=1,L,m^I}$ 、 $m^I \equiv \dim W^I \leq 6$ となるよう

にする。番号 j の振り直しには Gram - Schmidt の直交化法を用いる。

BDD 法では、式 4 9 で定義される $\{Z_j^I\}_{j=1,L,6}$ として部分領域 I 上ではなく、その内部境界上の 6 つの変位場を定めるところが CGCG 法と異なる。

上記の規定された運動としての剛体運動の定式を微小変形問題ソリッドモデルの剛体運動へ適用することは容易である。ソリッドモデルの場合、式 4 9 で定義される部分領域 I 上の 6 つの変位場

$\{Z_j^I\}_{j=1,L,6}$ はその節点 α の成分が式 5 1 となる。

【式 5 1】

$$\begin{aligned} &\{Z_1^I(\mathbf{X}_\alpha^I), Z_2^I(\mathbf{X}_\alpha^I), Z_3^I(\mathbf{X}_\alpha^I), Z_4^I(\mathbf{X}_\alpha^I), Z_5^I(\mathbf{X}_\alpha^I), Z_6^I(\mathbf{X}_\alpha^I)\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X^{\alpha 3} & -X^{\alpha 2} \\ 0 & 1 & 0 & -X^{\alpha 3} & 0 & X^{\alpha 1} \\ 0 & 0 & 1 & X^{\alpha 2} & -X^{\alpha 1} & 0 \end{pmatrix} \quad 40 \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{X}_α^I は部分領域 I 上の節点 α の初期座標である。

つぎに、微小変形問題シェルモデルへの適用を述べる。節点 α に

おけるシェル中立面の接空間の規格直交基底を一つ選んで $(\mathbf{e}_1^\alpha \ \mathbf{e}_2^\alpha)$

とする。 \mathbf{e}_3^α を節点 α の初期ディレクタとする。あるシェル要素上の

点の座標 $\mathbf{x} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は式 5 2 と書ける。

【式 5 2】

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha} N_{\alpha}(\xi^1, \xi^2) \left(\mathbf{X}^{\alpha} + \mathbf{U}^{\alpha} + \frac{a^{\alpha} \xi^3}{2} (1 + \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \times) \mathbf{e}_3^{\alpha} \right)$$

ここで (ξ^1, ξ^2, ξ^3) は当該シェル要素の局所座標である。また $N_{\alpha}, X^{\alpha}, U^{\alpha}, \boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ は節点 α のそれぞれシェル中立面上で定義された形状関数、初期節点座標、現節点変位、現ディレクタの回転量である。 \sum_{α} は

当該シェル要素に含まれる節点にわたる和を示す。

まず、シェルの微小平行移動 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ は式 5 3 である。

【式 5 3】

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a} = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \left[\mathbf{X}^{\alpha} + \mathbf{U}^{\alpha} + \mathbf{a} + \frac{a^{\alpha} \xi^3}{2} (1 + \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \times) \mathbf{e}_3^{\alpha} \right]$$

10

つまり節点変位 \mathbf{U}^{α} と現ディレクタの回転量 $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ の変化でまとめると式 5 4 である。

【式 5 4】

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{\alpha} \\ \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{\alpha} + \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

次にシェルの微小剛体回転を考える。変位 \mathbf{U}^{α} および現ディレクタの回転 $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ は微小とする。座標 $\mathbf{x} = x(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ に微小剛体回転 $1 + \mathbf{O}_i$ ($i = 1, 2, 3$) $= 1 + \boldsymbol{\theta} \times$ を作用させる。ここで、 $\{\mathbf{O}_i\}_{i=1,2,3}$ は式 4 6 で定義されたマトリクス、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)^T$ は回転方向ベクトルである。微小剛体

回転による現節点座標 $\mathbf{X}^{\alpha} + \mathbf{U}^{\alpha}$ 、現ディレクタ $\boldsymbol{\psi}^{\alpha} \equiv (1 + \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \times) \mathbf{e}_3^{\alpha}$ の変化量

は微小量一次まで考えて式 5 5 である。

【式 5 5】

$$\boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{X}^{\alpha} + \mathbf{U}^{\alpha}) \cong \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}^{\alpha}, \quad \boldsymbol{\theta} \times (1 + \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \times) \mathbf{e}_3^{\alpha} \cong \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_3^{\alpha} = \boldsymbol{\theta}^{\alpha} \times \mathbf{e}_3^{\alpha}$$

ここで、 $\boldsymbol{\theta}^{\alpha}$ は $\boldsymbol{\theta}$ を節点 α におけるシェル中立面の接空間 $((\mathbf{e}_1^{\alpha}, \mathbf{e}_2^{\alpha}))$ で

30

張られる部分空間) に射影したベクトル式 5 6 である。

【式 5 6】

$$\boldsymbol{\theta}^{\alpha} \equiv (\mathbf{e}_1^{\alpha}, \mathbf{e}_2^{\alpha}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{e}_2^{\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}$$

従って、微小剛体回転による座標 \mathbf{x} 全体の変化量は式 5 7 となる。

【式 5 7】

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{x} \cong \sum_{\alpha} N_{\alpha} \left(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}^{\alpha} + \frac{a^{\alpha} \xi^3}{2} \boldsymbol{\theta}^{\alpha} \times \mathbf{e}_3^{\alpha} \right)$$

40

従って、シェルの微小剛体回転は節点変位 \mathbf{U}^{α} と現ディレクタの回転量 $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ の変化でまとめると式 5 8 である。

【式 5 8】

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{\alpha} \\ \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{\alpha} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}^{\alpha} \\ \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} + \boldsymbol{\theta}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

微小平行移動 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ と微小剛体回転 $\mathbf{x} \rightarrow (1 + \boldsymbol{\theta} \times) \mathbf{x}$ を合わせると式 5 9 である。

【式 5 9】

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^\alpha \\ \boldsymbol{\varphi}^\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{U}^\alpha + \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}^\alpha \\ \boldsymbol{\varphi}^\alpha + \boldsymbol{\theta}^\alpha \end{pmatrix}$$

追加分 $\begin{pmatrix} \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}^\alpha \\ \boldsymbol{\theta}^\alpha \end{pmatrix}$ を成分で書けば式 6 0 となる。

【式 6 0】

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{X}^\alpha \\ \boldsymbol{\theta}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X^{\alpha 3} & -X^{\alpha 2} \\ 0 & 1 & 0 & -X^{\alpha 3} & 0 & X^{\alpha 1} \\ 0 & 0 & 1 & X^{\alpha 2} & -X^{\alpha 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1^{\alpha 1} & e_1^{\alpha 2} & e_1^{\alpha 3} \\ 0 & 0 & 0 & e_2^{\alpha 1} & e_2^{\alpha 2} & e_2^{\alpha 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix} \quad 10$$

となる。すなわち、式 4 9 で定義される部分領域 I 上の 6 つの変位場 $\{Z_j^i\}_{j=1, L, 6}$ はその節点 α の成分が式 6 1 となる。

【式 6 1】

$$\{Z_1^i(\mathbf{X}_\alpha^i), Z_2^i(\mathbf{X}_\alpha^i), Z_3^i(\mathbf{X}_\alpha^i), Z_4^i(\mathbf{X}_\alpha^i), Z_5^i(\mathbf{X}_\alpha^i), Z_6^i(\mathbf{X}_\alpha^i)\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & X^{\alpha 3} & -X^{\alpha 2} \\ 0 & 1 & 0 & -X^{\alpha 3} & 0 & X^{\alpha 1} \\ 0 & 0 & 1 & X^{\alpha 2} & -X^{\alpha 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1^{\alpha 1} & e_1^{\alpha 2} & e_1^{\alpha 3} \\ 0 & 0 & 0 & e_2^{\alpha 1} & e_2^{\alpha 2} & e_2^{\alpha 3} \end{pmatrix} \quad 20$$

\mathbf{X}_α^i は部分領域 I 上の節点 α の初期座標である。

部分領域 I の規定された運動としてアフィン変換（直線を直線に写し、その上の有向線分比を変えないと特徴づけられる変換）で表現される運動（以下、アフィン変換運動と呼ぶことにする）を考える。つまり、前節で扱った剛体運動を一般化したものであり、並進運動と一般線形変換運動の合成である。この場合 W^i は具体的に次のように構成できる。

部分領域 I のアフィン変換運動は次のように表現できる。 \mathbf{X}_α^i を

部分領域 I 上の節点 α の初期座標、 \mathbf{x}_α^i を変形後の座標として、

【式 6 2】

$$\mathbf{x}_\alpha^i = \mathbf{P}_j v^j + e^{E_j^i \alpha^j + E_j^i e^j + O_j^i \theta^j} \mathbf{X}_\alpha^i$$

【式 6 3】

$$\mathbf{E}_1^e \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2^e \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3^e \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad 40$$

【式 6 4】

$$\mathbf{E}_1^s \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2^s \equiv \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3^s \equiv \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

あるいは、式 6 5、式 6 6、式 6 7、式 6 8 である。

【式 6 5】

$$\mathbf{x}_\alpha^1 = \mathbf{P}_j \mathbf{v}^j + e^{E_{ij}\theta^{ij}} \mathbf{X}_\alpha^1$$

【式 6 6】

$$\mathbf{E}_{11} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

【式 6 7】

$$\mathbf{E}_{21} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{22} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

【式 6 8】

$$\mathbf{E}_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{32} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{33} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

微小変形を考えて、式 6 9、式 7 0 である。

【式 6 9】

$$\mathbf{x}_\alpha^1 \cong \mathbf{P}_j \mathbf{v}^j + (1 + E_{ij}\theta^{ij}) \mathbf{X}_\alpha^1$$

20

【式 7 0】

$$\mathbf{u}_\alpha^1 \cong \mathbf{P}_j \mathbf{v}^j + E_{ij} \mathbf{X}_\alpha^1 \theta^{ij}, \quad \mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad \theta^{ij} \equiv \begin{pmatrix} \theta^{11} & \theta^{12} & \theta^{13} \\ \theta^{21} & \theta^{22} & \theta^{23} \\ \theta^{31} & \theta^{32} & \theta^{33} \end{pmatrix}$$

そこで W^1 を、次の条件で定義される部分領域 I 上の 1 2 の変位場

$\{Z_j^1\}_{j=1,L,12}$ を基底とする、1 2 次元ベクトル空間で定義する。即ち、式 7 1 で

【式 7 1】

$$\begin{aligned} Z_j^1 : Z_j^1(\mathbf{X}_\alpha^1) &= \mathbf{P}_j \\ Z_{3i+j}^1 : Z_{3i+j}^1(\mathbf{X}_\alpha^1) &= E_{ij} \mathbf{X}_\alpha^1, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3 \end{aligned}$$

30

式 7 2 である。

【式 7 2】

$$W^1 \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{m^1} Z_j^1 \mu^j \mid \mu^j \in \mathbf{R} \right\}, \quad m^1 \leq 12$$

剛体運動の場合と同様、式 7 2 では次の事情を考慮している。部分領域によっては、そのアフィン変換運動の自由度が 1 1 以下の場合

があり得る。その場合は Z_j^1 の番号 j を振り直し、その基底が $\{Z_j^1\}_{j=1,L,m^1}$,

$m^1 \leq \dim W^1 \leq 12$ となるようにする。番号 j の振り直しには Gram - Schmidt の直交化法を用いる。

次に、CGCG 法による並列有限要素法ソルバの具体的な計算手順を述べる。

1. 領域分割

解析領域全体を複数の部分領域に分割する。

2. 部分領域の各プロセッサの担当する部分への分配

分割した部分領域の各計算ノード (CPU) への割り当てを決める。すなわち、各計算ノード (CPU) は、1 つまたは複数の部分領域を担当する。各ノードが担当する部分領域全体を部分と称する (第 1 図参照)。

50

3 . 剛性マトリックスの作成

各ノードにおいて、受け持ちの部分領域に対する剛性マトリックスを作成する。

4 . 部分領域全体重ね合わせ運動設定

4 . 1 全自由度表示の射影子作成

部分領域全体重ね合わせ運動を抜き出すための全自由度表示の *c o a r s e* 空間の基底 (部分空間の基底はその部分空間への射影子とみ

なせる) $D^I Z^I = \{ D^I Z_j^I \}_{j=1, L, m^I}$ を各ノードの担当部分領域に対して作成

する。

4 . 2 部分領域全体重ね合わせ運動マトリックス $K_{r g d}$ の作成

10

部分領域全体重ね合わせ運動マトリックス $K_{r g d} = K_{r g d, j}^{I^I} = D^I Z_i^I \cdot K D^I Z_j^I$

を作成する。この計算は、各部分領域の剛体マトリックス K^I を保持するノードにてその部分領域からの寄与を求め、それを全体にわたって足しあわせることで求められる。

4 . 3 部分領域全体重ね合わせ運動マトリックス $K_{r g d}$ の L U 分解

$K_{r g d}$ に対し、L U 分解 $K_{r g d} = L_{r g d} U_{r g d}$ を行なう。この L U 分解された $L_{r g d}$, $U_{r g d}$ をすべてのノードで保持しておく。

5 . 全自由度の前処理つき射影 C G 法初期設定

5 . 1 全自由度の初期変位設定

5 . 1 . 1 部分領域全体重ね合わせ運動 $\mu^{(w)}$

20

次の方程式式 7 3 を $\mu^{(w)}$ について解く。

【式 7 3】

$$K_{r g d} \mu^{(w)} = (N D Z)^T F$$

ここで、 $N D Z = \{ N^I D^I Z_j^I \}_{j=1, L, m^I}$ である。 F は各ノードが担当部分領域

に関して保持しており、各ノードで $(N D Z)^T F$ を求めた後通信して領域全体にわたる右辺ベクトルを作成し、すべてのノードで L U 分解した $K_{r g d}$ を用いて $\mu^{(w)}$ を求める。式 1 0 の $u^{(w)}$ に相当するものは $u^{(w)} = N D Z \mu^{(w)}$ である。

5 . 1 . 2 初期変位 u_0 の設定

30

初期変位 u_0 を式 7 4 で設定する。

【式 7 4】

$$u_0 = N D Z \mu^{(w)}$$

この u_0 は各ノードの担当領域部分に対してのみ保持する。

5 . 2 全自由度の初期残差 g_0 の計算

初期残差 g_0 を式 7 5 で求める。

【式 7 5】

$$g_0 = K u_0 - F$$

この残差ベクトルは各ノードの担当分のみ保持する。式 1 4 ~ 式

1 6 で説明した残差 $r_{(a)_n}$ と符号が逆であることに注意。

5 . 3 対角スケーリング前処理計算

残差 g_0 に対し $D_K^{-1} g_0$ を求める (対角スケーリング前処理)。ここ

で、 D_K^{-1} は D_K の逆行列、 D_K は K の対角行列 (対角成分が K の対角成

分と等しい対角行列) である。各ノードにて担当部分について求める。

5 . 4 全自由度の Coarse Grid 前処理計算

以下のとおり、Coarse Grid 前処理 $P^{(a)} G g_0 = \bar{G} g_0$ を行なう。

5 . 4 . 1 部分領域全体重ね合わせ運動変数 $\mu^{(w)}$

次の方程式式 7 6 を $\mu^{(w)}$ について解く。

50

【式 7 6】

$$K_{\text{igd}}\boldsymbol{\mu}^{(w)} = -(\text{NDZ})^T \text{KD}_K^{-1} \mathbf{g}_0$$

右辺ベクトルは、通信してすべてのノードで全体領域にわたって作成し、すべてのノードで $\boldsymbol{\mu}^{(w)}$ を求める。

5. 4. 2 $\boldsymbol{\mu}_0^{(w)}$ の設定
 $\boldsymbol{\mu}_0^{(w)}$ を式 7 7 の通り設定する。

【式 7 7】

$$\boldsymbol{\mu}_0^{(w)} = \text{NDZ}\boldsymbol{\mu}^{(w)}$$

$\boldsymbol{\mu}_0^{(w)}$ は担当部分のみ保持する。

5. 4. 3 $\text{P}^{(a)}\mathbf{G}\mathbf{g}_0 = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_0$ の計算

$\bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_0$ を式 7 8 のとおり計算する。

10

【式 7 8】

$$\bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_0 = \boldsymbol{\mu}_0^{(w)} + \text{D}_K^{-1} \mathbf{g}_0$$

担当部分に関して求める。

5. 5 全自由度の CG 法探索方向ベクトル初期値 w_0 の設定

全自由度の CG 法探索方向ベクトル初期値 w_0 を式 7 9 で設定する。

【式 7 9】

$$w_0 = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_0$$

20

担当部分に関して求める。

6. 全自由度の前処理つき射影 CG 法反復計算

6. 1 全自由度の変位更新

$n \geq 1$ に対して、以下の手順にて全自由度の変位 u_{n-1} を更新する。

6. 1. 1 $K w_{n-1}$ の計算

$K w_{n-1}$ を担当部分に関して求める。

6. 1. 2 α_n の計算

通信を行ない、全ノードにて α_n を式 8 0 のとおり求める。

【式 8 0】

$$\alpha_n = \frac{\mathbf{g}_{n-1} \cdot \bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_{n-1}}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot K\mathbf{w}_{n-1}}$$

30

6. 1. 3 u_{n-1} の担当部分の更新

式 8 1 により u_{n-1} の担当部分を更新する。

【式 8 1】

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} - \alpha_n \mathbf{w}_{n-1}$$

6. 2 全自由度の残差更新

$n \geq 1$ に対して、全自由度の残差 \mathbf{g}_{n-1} の担当部分を式 8 2 に従って更新する。

【式 8 2】

$$\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_{n-1} - \alpha_n K\mathbf{w}_{n-1}$$

40

6. 3 対角スケーリング前処理 $\text{D}_K^{-1}\mathbf{g}_n$ の計算

5. 3 と同様に、残差 \mathbf{g}_n に対し $\text{D}_K^{-1}\mathbf{g}_n$ を各ノードにて担当部分に関

して求める。(対角スケーリング前処理)。

6. 4 全自由度の Coarse Grid 前処理 $\bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_n$ の計算

5. 4 と同じ手順にて、 $\bar{\mathbf{G}}\mathbf{g}_n$ を担当部分に関して求める。すなわ

ち 2 つの方程式式 8 3、式 8 4 を解き式 8 5 とする。

【式 8 3】

$$K_{igd}\mu^{(w)} = -(NDZ)^T KD_K^{-1} g_n$$

【 式 8 4 】

$$\mu_n^{(w)} = NDZ\mu^{(w)}$$

【 式 8 5 】

$$\bar{G}g_n = \mu_n^{(w)} + D_K^{-1} g_n$$

6 . 5 全自由度のCG法探索方向ベクトル w_{n-1} の更新
次のとおり w_{n-1} を更新する。

6 . 5 . 1 μ_n の計算

μ_n を式 8 6 のとおり、通信して全ノードにて求める。

10

【 式 8 6 】

$$\beta_n = \frac{g_n \cdot \bar{G}g_n}{g_{n-1} \cdot \bar{G}g_{n-1}}$$

6 . 5 . 2 w_{n-1} の更新

w_{n-1} を式 8 7 のとおり担当部分ごとに更新する。

【 式 8 7 】

$$w_n = \bar{G}g_n + \beta_n w_{n-1}$$

6 . 6 収束判定

更新した残差 g_n より収束を判定する。収束していない場合は、6 . 1 に戻りそれ以降を再度実行する。

20

7 . 変位解 u の出力

前処理つきCG法収束時点での u_n を変位解 u とする。必要なら u より歪みや応力を求める。この計算手順は、第 2 図に示した。

実施例

以下実施例に基づいて、CGCG法が、DDM、並列CG法、BDDと比較して、計算パフォーマンスに優れていることを説明する。鉄道台車をモデルとする有限要素法における計算パフォーマンスを比較する。このモデルでは、要素が四面体1次要素、節点数が323, 639、要素数が1, 123, 836、自由度数が970, 911(6自由度のみ拘束)であり、計算環境は、計算機Dual Pentium III 600MHz 4台、PE数4(各マシンに1プロセス)、計算条件はCG法トレランス 1.0×10^{-6} であつた。計算パフォーマンスの比較を第1表に示した。第1表から、次のことがわかる。即ちCGCG法はDDM、並列CG法に比較して、反復ステップ数、計算時間共に極めて少ない。CGCG法は反復ステップ数に関してはBDD法に劣るが、計算速度に関してはBDD法の3倍近く早い。

30

第1表

| 計算方法 | 部分領域数 | 反復ステップ数 | 計算時間 (分) | メモリー使用量 (MB/PE) |
|-------|---------|---------|-------------|--------------------|
| CGCG法 | 1, 600 | 599 | 15 | 167 |
| 並列CG法 | 4 | 28, 565 | 201 | 90 |
| DDM | 12, 000 | 20, 358 | 377 | 167 |
| BDD法 | 2, 400 | 293 | 40 | 440 |

40

比較例 1

第1表には、Neumann前処理つきDDMとの比較は示されていないが、DDM、及びNeumann前処理つきDDMの二者の計算パフォーマンスを比較した計算比較例がある。比較例の計算パフォーマンスを第2表に示した。この比較例は、複数の直方体を組み合わせて作った簡易モデルにおいて、要素が四面体2次要素、節点数が1, 029

50

、要素数が504、自由度数が3,087(底面を完全固定、上面に強制変位)であり、計算環境は計算機Alpha 21164 600MHz 1台、PE数は1、計算条件はCG法でトレランスが 1.0×10^{-7} であった。第2表は、DDMとNeumann前処理つきDDMの計算時間と反復ステップ数を示している。Neumann前処理つきDDMで短縮された時間は13%程度、反復ステップ数もせいぜい1/2程度である。この比較例1と実施例から、本発明のCGCG法は、超大規模構造問題の解法として従来知られているDDM、並列CG法、Neumann前処理つきDDMに比較して、計算時間が極めて短く、高速化及びロバスト性向上を目的として開発されたBDD法と比べてもより速い。反復ステップ数に関しては、BDD法には劣るが、DDM、並列CG法及びNeumann前処理付きDDMとの比較では極めて少なくなることがわかる。このように、CGCG法は、超構造問題の解法として計算パフォーマンスが極めて高いことがわかる。

第2表

| 計算方法 | 部分領域数 | 反復ステップ数 | 計算時間 (秒) |
|----------------|-------|---------|-------------|
| DDM | 12 | 420 | 480 |
| Neumann 前処理DDM | 12 | 240 | 420 |

20

産業上の利用可能性

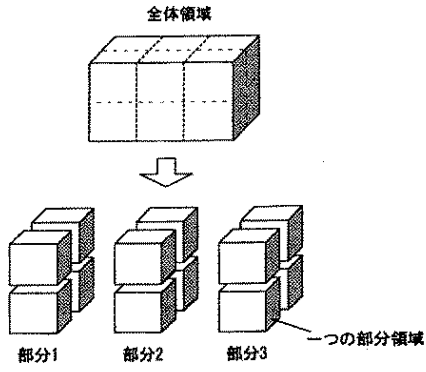
CGCG法は、大規模な問題を有効に解く有限要素法ソルバアルゴリズムであり、有限要素法に基づく解析一般に適用可能である。たとえば、有限要素法によって定式化される連続体力学全般、固体力学、構造力学、流体力学、熱伝導問題、電磁場問題に利用できる。また、有限要素法は微分方程式を支配方程式とする境界値問題の一般的解法とみなされるので、その意味で、CGCG法は、微分方程式を支配方程式とする境界値問題全般の解法として適用可能である。どの問題においても、CGCG法の適用は大規模な問題を効率よく解くことに有効である。CGCG法は、大規模な問題を解く有限要素法ソルバアルゴリズムとして従来から知られている、DDM、並列CG法及びNeumann前処理付きDDMに比較して計算時間が極めて短くなり、計算反復ステップが極めて少なくなるという特徴を有する。

更に、CGCG法は計算時間に関して、高速化を目的として開発されたBDD法に比較してもより高い性能を示す。

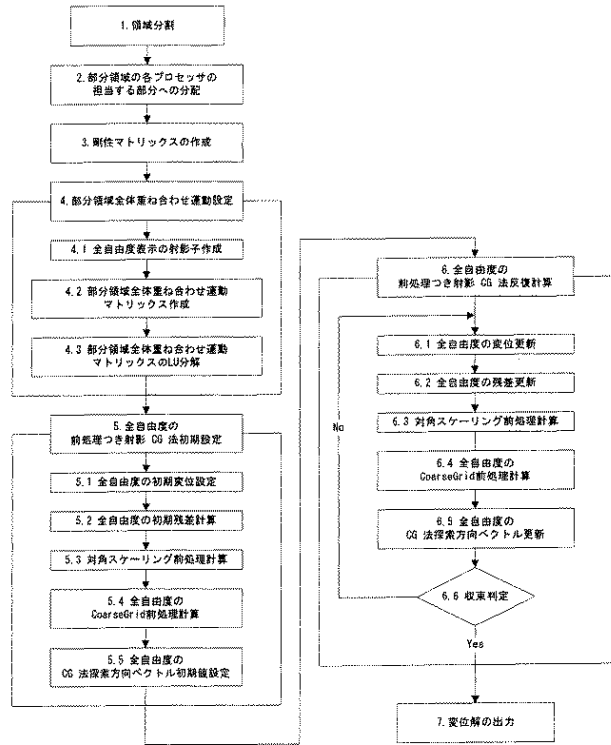
【図面の簡単な説明】

第1図は領域分割を説明する図であり、第2図はCGCG法の計算フローチャートである。

【 図 1 】
第 1 図



【 図 2 】
第 2 図



【 国際調査報告 】

| INTERNATIONAL SEARCH REPORT | | International application No. PCT/JP02/04617 |
|---|--|---|
| A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER Int.Cl. ⁷ G06F17/13, G06F15/16, G06F17/50, G01M19/00 According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC | | |
| B. FIELDS SEARCHED Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols) Int.Cl. ⁷ G06F17/10-17/18, G06F15/16-15/177, G06F17/50, G06F17/60-19/00, G01M13/00, G01M19/00 Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched Jitsuyo Shinan Koho 1922-1996 Toroku Jitsuyo Shinan Koho 1994-2002 Kokai Jitsuyo Shinan Koho 1971-2002 Jitsuyo Shinan Toroku Koho 1996-2002 Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used) | | |
| C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT | | |
| Category* | Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages | Relevant to claim No. |
| A | Hiroshi AKITA, Koichiro ISHIHARA, Shinobu YOSHIMURA, Ryuji SHIOTANI, "PC Cluster o Mochiita 1160-man Jiyudo Tetsudo Daisha Model no Shosai Oryoku Kaiseki", Dai 10-kai Design & Systems Conference, [online], 2001. 01, pages 84 to 87, [Retrieval date 13 August, 2002 (13.08.02)], Internet <URL:http://www.albe.co.jp/paper/jame10ds200101.pdf> | 1-12 |
| A | Ryuji SHIOTANI, Motoki YAGAWA, "Hanpuku Kaiho o Mochiita Ryciki Bunkatsugata FEM", The Japan Society of Mechanical Engineers, Dai 6-kai The Computational Mechanics Conference, 10 November, 1993 (10.11.93), pages 23 to 24 | 1-12 |
| <input checked="" type="checkbox"/> Further documents are listed in the continuation of Box C. <input type="checkbox"/> See patent family annex. | | |
| * Special categories of cited documents: "A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance "E" earlier document but published on or after the international filing date "L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified) "O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means "P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed "I" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention "X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone "Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art "W" document member of the same patent family | | |
| Date of the actual completion of the international search 13 August, 2002 (13.08.02) | | Date of mailing of the international search report 03 September, 2002 (03.09.02) |
| Name and mailing address of the ISA/ Japanese Patent Office | | Authorized officer |
| Facsimile No. | | Telephone No. |

Form PCT/ISA/210 (second sheet) (July 1998)

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

 International application No.
 PCT/JP02/04617

| C (Continuation). DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT | | |
|---|--|-----------------------|
| Category* | Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages | Relevant to claim No. |
| A | Osamu TATEBE, MGCG METHOD: A ROBUST AND HIGHLY PARALLEL ITERATIVE METHOD, doctoral thesis, The Graduate School of The University of Tokyo, [online], March 1997, [retrieved on 2002-08-13], Retrieved from the Internet: <URL:http://phase.hpc.jp/people/tatebe/research/paper/PhD-tatebe.ps.gz> | 1-12 |
| A | Bonny Mertens, Herbert De Gersen, Ronnie Belmans, Kay Hameyer, Domenico Lahaye, Stefan Vandewalle, Dirk Roose, An Algebraic Multigrid Method for Solving Very large Electromagnetic Systems, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, September 1998, Vol.34, No.5, pages 3327 to 3330 | 1-12 |

| | | |
|---|--|---|
| 国際調査報告 | | 国際出願番号 PCT/JP02/04617 |
| A. 発明の属する分野の分類 (国際特許分類 (IPC)) | | |
| Int. Cl. | G06F17/13 G06F15/16 G06F17/50 | G01M19/00 |
| B. 調査を行った分野 | | |
| 調査を行った最小限資料 (国際特許分類 (IPC)) | | |
| Int. Cl. | G06F17/10-17/18 G06F15/16-15/177 G06F17/50 | G06F17/60-19/00 G01M13/00 G01M19/00 |
| 最小限資料以外の資料で調査を行った分野に含まれるもの | | |
| 日本国実用新案公報 1922-1996年 | | |
| 日本国公開実用新案公報 1971-2002年 | | |
| 日本国特許実用新案公報 1994-2002年 | | |
| 日本国実用新案登録公報 1996-2002年 | | |
| 国際調査で使用した電子データベース (データベースの名称、調査に使用した用語) | | |
| C. 関連すると認められる文献 | | |
| 引用文献の カテゴリー* | 引用文献名 及び一部の箇所が関連するときは、その関連する箇所の表示 | 関連する 請求の範囲の番号 |
| A | 秋葉博, 石原広一郎, 吉村忍, 塩谷隆二, PCクラスタを用いた11000万自由度鉄道台車モデルの詳細応力解析, 第10回設計工学・システム部門講演会講演論文集, [online], 2001.01, p. 84-87, [検索日 2002.08.13], インターネット<URL: http://www.albe.co.jp/paper/jsme10ds200101.pdf> | 1-12 |
| A | 塩谷隆二, 矢川元基, 反復解法を用いた領域分割型FEM, 日本機械学会第6回計算力学講演会講演論文集, 1993.11.10, p. 23-24 | 1-12 |
| <input checked="" type="checkbox"/> C欄の続きにも文献が列挙されている。 <input type="checkbox"/> パテントファミリーに関する別紙を参照。 | | |
| * 引用文献のカテゴリー | | |
| 「A」 特に関連のある文献ではなく、一般的技術水準を示すもの | | |
| 「B」 国際出願日前の出願または特許であるが、国際出願日以後に公表されたもの | | |
| 「L」 優先権主張に拠る文献又は他の文献の発行日若しくは他の特別な理由を確立するために引用する文献 (理由を付す) | | |
| 「O」 口頭による開示、使用、展示等に普及する文献 | | |
| 「P」 国際出願日前で、かつ優先権の主張の基礎となる出願 | | |
| の日の後に公表された文献 | | |
| 「T」 国際出願日又は優先日後に公表された文献であって出願と矛盾するものではなく、発明の原理又は理論の理解のために引用するもの | | |
| 「X」 特に関連のある文献であって、当該文献のみで発明の新規性又は進歩性がないと考えられるもの | | |
| 「Y」 特に関連のある文献であって、当該文献と他の1以上の文献との、当業者にとって自明である組合せによって進歩性がないと考えられるもの | | |
| 「&」 同一パテントファミリー文献 | | |
| 国際調査を完了した日 | 13.08.02 | 国際調査報告の発送日 03.09.02 |
| 国際調査機関の名称及びあて先 | 日本国特許庁 (ISA/IPC) 郵便番号100-8915 東京都千代田区霞が関三丁目4番3号 | 特許庁審査官 (権限のある職員) 津木 泰 電話番号 03-3581-1101 内線 8545 |

| 国際調査報告 | | 国際出版番号 PCT/JPG2/04617 |
|-----------------------|--|-----------------------|
| C (続き) . 関連すると認められる文献 | | |
| 引用文献の カテゴリー* | 引用文献名 及び一部の箇所が関連するときは、その関連する箇所の表示 | 関連する 請求の範囲の番号 |
| A | Osamu Tatebe, MCGG METHOD: A ROBUST AND HIGHLY PARALLEL ITERATIVE METHOD, doctoral thesis, The Graduate School of The University of Tokyo, [online], March 1997, [retrieved on 2002-08-13], Retrieved from the Internet: <URL:http://phase.hpc.jp/people/tatebe/research/paper/PhD-tatebe.ps.gz> | 1-12 |
| A | Ronny Mertens, Herbert De Gersen, Ronnie Belmans, Kay Hameyer, Domenico Lahaye, Stefan Vandewalle, Dirk Roose, An Algebraic Multigrid Method for Solving Very large Electromagnetic Systems, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, September 1998, Vol.34, No.5, pages. 3327-3330 | 1-12 |

フロントページの続き

(72)発明者 大山 知信

東京都品川区大井1丁目2番17号 株式会社アライドエンジニアリング内

(72)発明者 鈴木 正文

東京都品川区大井1丁目2番17号 株式会社アライドエンジニアリング内

(注)この公表は、国際事務局(WIPO)により国際公開された公報を基に作成したものである。なおこの公表に係る日本語特許出願(日本語実用新案登録出願)の国際公開の効果は、特許法第184条の10第1項(実用新案法第48条の13第2項)により生ずるものであり、本掲載とは関係ありません。