

(19) 日本国特許庁(JP)

再公表特許(A1)

(11) 国際公開番号

WO2007/066445

発行日 平成21年5月14日 (2009.5.14)

(43) 国際公開日 平成19年6月14日 (2007.6.14)

(51) Int.Cl. F I テーマコード (参考)
G06F 17/16 (2006.01) G06F 17/16 K 5B056

審査請求 未請求 予備審査請求 未請求 (全 60 頁)

<p>出願番号 特願2007-549031 (P2007-549031)</p> <p>(21) 国際出願番号 PCT/JP2006/318713</p> <p>(22) 国際出願日 平成18年9月21日 (2006.9.21)</p> <p>(31) 優先権主張番号 特願2005-351089 (P2005-351089)</p> <p>(32) 優先日 平成17年12月5日 (2005.12.5)</p> <p>(33) 優先権主張国 日本国 (JP)</p>	<p>(71) 出願人 504132272 国立大学法人京都大学 京都府京都市左京区吉田本町36番地1</p> <p>(74) 代理人 100115749 弁理士 谷川 英和</p> <p>(72) 発明者 中村 佳正 京都府京都市左京区吉田本町 国立大学法人京都大学大学院情報学研究科内</p> <p>(72) 発明者 譽田 太朗 京都府京都市左京区吉田本町 国立大学法人京都大学大学院情報学研究科内</p> <p>(72) 発明者 岩▲崎▼ 雅史 京都府京都市左京区吉田本町 国立大学法人京都大学大学院情報学研究科内</p>
--	--

最終頁に続く

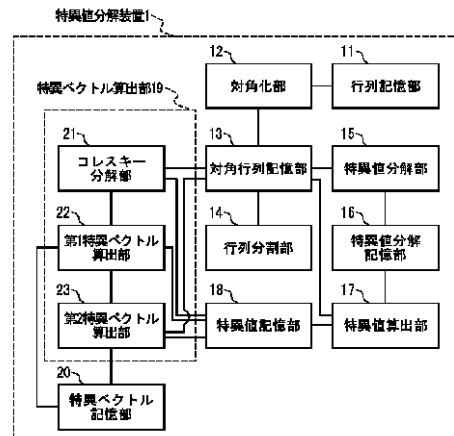
(54) 【発明の名称】 特異値分解装置、及び特異値分解方法

(57) 【要約】

【課題】 高速・高精度であり、並列処理可能な特異値分解装置を提供する。

【解決手段】 2重対角行列 B を 2 個の 2 重対角行列に分割する処理を繰り返し行う行列分割部 14 と、分割後の 2 重対角行列を特異値分解する特異値分解部 15 と、特異値分解部 15 によって特異値分解された特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とから、分割元の 2 重対角行列の特異値と、分割元の 2 重対角行列の行列要素とを算出する処理を、2 重対角行列 B の特異値を算出するまで繰り返す特異値算出部 17 と、2 重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用いて 2 重対角行列 B の特異ベクトルを算出する特異ベクトル算出部 19 と、を備える。

【選択図】 図 1



- 1... SINGULAR VALUE DECOMPOSITION DEVICE
- 19... SINGULAR VECTOR CALCULATION UNIT
- 21... CHOLESKY DECOMPOSITION UNIT
- 22... FIRST SINGULAR VECTOR CALCULATION UNIT
- 23... SECOND SINGULAR VECTOR CALCULATION UNIT
- 20... SINGULAR VECTOR STORAGE UNIT
- 12... DIAGONALIZING UNIT
- 13... DIAGONAL MATRIX STORAGE UNIT
- 14... MATRIX DIVISION UNIT
- 18... SINGULAR VALLIE STORAGE UNIT
- 11... MATRIX STORAGE UNIT
- 15... SINGULAR VALUE DECOMPOSITION UNIT
- 16... SINGULAR VALUE DECOMPOSITION STORAGE UNIT
- 17... SINGULAR VALUE CALCULATION UNIT

【特許請求の範囲】

【請求項 1】

2重対角行列 B が記憶される対角行列記憶部と、
前記 2重対角行列 B が 2個の 2重対角行列に分割され、その 2重対角行列が 2個の 2重対角行列に分割される処理が、分割後の各 2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返され、当該あらかじめ決められた大きさ以下の各 2重対角行列に対して特異値分解が行われた結果である、前記各 2重対角行列の特異値と、前記各 2重対角行列の特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部と、

前記 2重対角行列 B の特異値が記憶される特異値記憶部と、
各 2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の 2重対角行列の特異値と、分割元の 2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の 2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列 B の少なくとも 1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記 2重対角行列 B の少なくとも 1個の特異値を前記特異値記憶部に蓄積する特異値算出部と、

前記 2重対角行列 B の特異ベクトルが記憶される特異ベクトル記憶部と、
前記対角行列記憶部から 2重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2重対角行列 B の特異値を読み出し、2重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用いて 2重対角行列 B の少なくとも 1個の特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出部と、を備えた特異値分解装置。

【請求項 2】

前記対角行列記憶部には、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各 2重対角行列も記憶され、

前記あらかじめ決められた大きさ以下の各 2重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各 2重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各 2重対角行列の特異値と、前記各 2重対角行列の特異ベクトルとを算出し、当該特異値と、当該特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とを前記特異値分解記憶部に蓄積する特異値分解部をさらに備えた請求項 1 記載の特異値分解装置。

【請求項 3】

2重対角行列 B が記憶される対角行列記憶部と、
前記対角行列記憶部から前記 2重対角行列 B を読み出し、当該 2重対角行列 B を 2個の 2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積し、その 2重対角行列を 2個の 2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積する処理を、分割後の各 2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返す行列分割部と、

前記あらかじめ決められた大きさ以下の各 2重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各 2重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各 2重対角行列の特異値と、前記各 2重対角行列の特異ベクトルとを算出する特異値分解部と、

前記特異値分解部によって特異値分解された特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部と、

前記 2重対角行列 B の特異値が記憶される特異値記憶部と、
各 2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の 2重対角行列の特異値と、分割元の 2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の 2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列 B の少なくとも 1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記 2重対角行列 B の少なくとも 1個の特異値を前記特異値記憶部に蓄積する特異値算出部と、

前記 2重対角行列 B の特異ベクトルが記憶される特異ベクトル記憶部と、
前記対角行列記憶部から 2重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2重対角行列 B の特異値を読み出し、2重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用い

10

20

30

40

50

て 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出部と、を備えた特異値分解装置。

【請求項 4】

前記特異ベクトル算出部は、q d 型ツイスト分解法により特異ベクトルを算出する、請求項 3 記載の特異値分解装置。

【請求項 5】

前記特異ベクトル算出部は、L V 型ツイスト分解法により特異ベクトルを算出する、請求項 3 記載の特異値分解装置。

【請求項 6】

前記特異ベクトル算出部は、

前記対角行列記憶部から 2 重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、前記 2 重対角行列 B の各要素に関してミウラ変換、d L V v 型変換、逆ミウラ変換を行うことによって、前記 2 重対角行列 B を上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ にコレスキー分解するコレスキー分解部と、

前記上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ の各要素と、前記 2 重対角行列 B の特異値とを用いて一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第 1 特異ベクトル算出部と、

前記第 1 特異ベクトル算出部が算出した一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルと、前記 2 重対角行列 B の特異値と、前記 2 重対角行列 B とを用いて他方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第 2 特異ベクトル算出部と、をさらに備えた、請求項 5 記載の特異値分解装置。

【請求項 7】

前記コレスキー分解部は、複数のコレスキー分解手段を備え、

前記複数のコレスキー分解手段が、前記 2 重対角行列 B をコレスキー分解する処理を並列実行する、請求項 6 記載の特異値分解装置。

【請求項 8】

前記第 1 特異ベクトル算出部は、複数の第 1 特異ベクトル算出手段を備え、

前記複数の第 1 特異ベクトル算出手段が、特異ベクトルを算出する処理を並列実行する、請求項 6 または請求項 7 記載の特異値分解装置。

【請求項 9】

前記第 2 特異ベクトル算出部は、複数の第 2 特異ベクトル算出手段を備え、

前記複数の第 2 特異ベクトル算出手段が、特異ベクトルを算出する処理を並列実行する、請求項 6 から請求項 8 のいずれか記載の特異値分解装置。

【請求項 10】

前記特異値算出部は、複数の特異値算出手段を備え、

前記複数の特異値算出手段が、分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を並列実行する、請求項 3 から請求項 9 のいずれか記載の特異値分解装置。

【請求項 11】

前記特異値分解部は、複数の特異値分解手段を備え、

前記複数の特異値分解手段が、2 重対角行列に対して特異値分解を行う処理を並列実行する、請求項 3 から請求項 10 のいずれか記載の特異値分解装置。

【請求項 12】

行列 A が記憶される行列記憶部と、

前記行列 A を前記行列記憶部から読み出し、前記行列 A を 2 重対角化した前記 2 重対角行列 B を算出して前記対角行列記憶部に蓄積する対角化部と、をさらに備えた請求項 3 から請求項 11 のいずれか特異値分解装置。

【請求項 13】

前記行列分割部は、2 重対角行列を略半分の 2 個の 2 重対角行列に分割する、請求項 3 から請求項 12 のいずれか記載の特異値分解装置。

【請求項 14】

10

20

30

40

50

前記特異値算出部は、2重対角行列Bの全ての特異値を算出する、請求項3から請求項13のいずれか記載の特異値分解装置。

【請求項15】

前記特異ベクトル算出部は、2重対角行列Bの全ての特異ベクトルを算出する、請求項14記載の特異値分解装置。

【請求項16】

前記行列Aは、2次元画像j ($j = 1, \dots, m$ 、 m は3以上の整数)から抽出された特徴点i ($i = 1, \dots, n$ 、 n は2以上の整数)の座標(x_{ij}, y_{ij})から構成される行列である、請求項12記載の特異値分解装置。

【請求項17】

前記行列Aは、索引語の重みを要素とするベクトルであって、検索対象となる文書を示すベクトルである d_1, \dots, d_n (n は2以上の整数)を各列に有する行列である索引語文書行列である、請求項12記載の特異値分解装置。

【請求項18】

2重対角行列Bが記憶される対角行列記憶部と、前記2重対角行列Bが2個の2重対角行列に分割され、その2重対角行列が2個の2重対角行列に分割される処理が、分割後の各2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返され、当該あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列に対して特異値分解が行われた結果である、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部と、前記2重対角行列Bの特異値が記憶される特異値記憶部と、特異値算出部と、前記2重対角行列Bの特異ベクトルが記憶される特異ベクトル記憶部と、特異ベクトル算出部とを備えた特異値分解装置で用いられる特異値分解方法であって、

前記特異値算出部が、各2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の2重対角行列の特異値と、分割元の2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を前記特異値記憶部に蓄積する特異値算出ステップと、

前記特異ベクトル算出部が、前記対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、2重対角行列Bとその特異値とから、ツイスト分解法を用いて2重対角行列Bの少なくとも1個の特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出ステップと、を備えた特異値分解方法。

【請求項19】

2重対角行列Bが記憶される対角行列記憶部と、行列分割部と、特異値分解部と、前記特異値分解部によって特異値分解された特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部と、前記2重対角行列Bの特異値が記憶される特異値記憶部と、特異値算出部と、前記2重対角行列Bの特異ベクトルが記憶される特異ベクトル記憶部と、特異ベクトル算出部と、を備えた特異値分解装置で用いられる特異値分解方法であって、

前記行列分割部が、前記対角行列記憶部から前記2重対角行列Bを読み出し、当該2重対角行列Bを2個の2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積し、その2重対角行列を2個の2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積する処理を、分割後の各2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返す行列分割ステップと、前記特異値分解部が、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各2重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルとを算出する特異値分解ステップと、

前記特異値算出部が、各2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部か

10

20

30

40

50

ら読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の2重対角行列の特異値と、分割元の2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を前記特異値記憶部に蓄積する特異値算出ステップと、

前記特異ベクトル算出部が、前記対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、2重対角行列Bとその特異値とから、ツイスト分解法を用いて2重対角行列Bの少なくとも1個の特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出ステップと、を備えた特異値分解方法。

10

【請求項20】

前記特異ベクトル算出部は、コレスキー分解部と、第1特異ベクトル算出部と、第2特異ベクトル算出部と、をさらに備えており、

前記特異ベクトル算出ステップは、

前記コレスキー分解部が、前記対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、前記2重対角行列Bの各要素に関してミウラ変換、dLVv型変換、逆ミウラ変換を行うことによって、前記2重対角行列Bを上2重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下2重対角行列 $B^{(-1)}$ にコレスキー分解するコレスキー分解ステップと、

前記第1特異ベクトル算出部が、前記上2重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下2重対角行列 $B^{(-1)}$ の各要素と、前記2重対角行列Bの特異値とを用いて一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第1特異ベクトル算出ステップと、

20

前記第2特異ベクトル算出部が、前記第1特異ベクトル算出ステップで算出した一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルと、前記2重対角行列Bの特異値と、前記2重対角行列Bとを用いて他方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第2特異ベクトル算出ステップと、をさらに備えた、請求項19記載の特異値分解方法。

【請求項21】

コンピュータに、

2重対角行列Bが2個の2重対角行列に分割され、その2重対角行列が2個の2重対角行列に分割される処理が、分割後の各2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返され、当該あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列に対して特異値分解が行われた結果である、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部から、各2重対角行列の特異値と、行列要素とを読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の2重対角行列の特異値と、分割元の2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を特異値記憶部に蓄積する特異値算出ステップと、

30

前記2重対角行列Bが記憶される対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、2重対角行列Bとその特異値とから、ツイスト分解法を用いて2重対角行列Bの少なくとも1個の特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出ステップと、を実現させるためのプログラム。

40

【請求項22】

コンピュータに、

2重対角行列Bが記憶される対角行列記憶部から前記2重対角行列Bを読み出し、当該2重対角行列Bを2個の2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積し、その2重対

50

角行列を2個の2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積する処理を、分割後の各2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返す行列分割ステップと、

前記あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各2重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルとを算出し、特異値分解された特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とを特異値分解記憶部に蓄積する特異値分解ステップと、

各2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の2重対角行列の特異値と、分割元の2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を特異値記憶部に蓄積する特異値算出ステップと、

前記対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、2重対角行列Bとその特異値とから、ツイスト分解法を用いて2重対角行列Bの少なくとも1個の特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出ステップと、を実行させるためのプログラム。

【請求項23】

前記特異ベクトル算出ステップは、

前記対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、前記2重対角行列Bの各要素に関してミウラ変換、dLV型変換、逆ミウラ変換を行うことによって、前記2重対角行列Bを上2重対角行列 $B^{(+)}$ 及び下2重対角行列 $B^{(-)}$ にコレスキー分解するコレスキー分解ステップと、

前記上2重対角行列 $B^{(+)}$ 及び下2重対角行列 $B^{(-)}$ の各要素と、前記2重対角行列Bの特異値とを用いて一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第1特異ベクトル算出ステップと、

前記第1特異ベクトル算出ステップで算出した一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルと、前記2重対角行列Bの特異値と、前記2重対角行列Bとを用いて他方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第2特異ベクトル算出ステップと、をさらに備えた、請求項22記載のプログラム。

【発明の詳細な説明】

【技術分野】

【0001】

本発明は、特異値分解を行う特異値分解装置等に関する。

【背景技術】

【0002】

特異値分解(SVD: Singular Value Decomposition)はデータ処理の中心な行列演算として、画像処理やデータ検索等の多くの分野に応用されている。

なお、特異値分解の従来例としては、例えば、下記の非特許文献1のものなどが知られている。

【非特許文献1】Ming Gu and Stanley C. Eisenstat, 「A Divide-and-Conquer Algorithm for the Bidiagonal SVD」、SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications、Vol. 16, No. 1, pp. 79-92 (1995)

【発明の開示】

【発明が解決しようとする課題】

【0003】

10

20

30

40

50

近年、これらの応用分野におけるデータ量の増大などに伴って、高速・高精度な特異値分解が求められている。また、特異値分解を並列処理することができる特異値分解装置等の開発が望まれていた。

本発明は、上記状況の下になされたものであり、並列性に優れた高速、高精度な特異値分解を実行可能な特異値分解装置等を提供することを目的とする。

【課題を解決するための手段】

【0004】

上記目的を達成するため、本発明による特異値分解装置は、2重対角行列Bが記憶される対角行列記憶部と、前記2重対角行列Bが2個の2重対角行列に分割され、その2重対角行列が2個の2重対角行列に分割される処理が、分割後の各2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返され、当該あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列に対して特異値分解が行われた結果である、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部と、前記2重対角行列Bの特異値が記憶される特異値記憶部と、各2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の2重対角行列の特異値と、分割元の2重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を算出するまで繰り返し、前記2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を前記特異値記憶部に蓄積する特異値算出部と、前記2重対角行列Bの特異ベクトルが記憶される特異ベクトル記憶部と、前記対角行列記憶部から2重対角行列Bを読み出し、前記特異値記憶部から前記2重対角行列Bの特異値を読み出し、2重対角行列Bとその特異値とから、ツイスト分解法を用いて2重対角行列Bの少なくとも1個の特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出部と、を備えたものである。

10

20

【0005】

このような構成により、まず特異値を算出し、その特異値に基づいてツイスト分解法を用いて特異ベクトルを算出することによって、高速で高精度な特異値分解を実現することができる。また、並列性にも優れている。

【0006】

また、本発明による特異値分解装置では、前記対角行列記憶部には、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列も記憶され、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各2重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルとを算出し、当該特異値と、当該特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とを前記特異値分解記憶部に蓄積する特異値分解部をさらに備えてもよい。

30

【0007】

このような構成により、特異値を算出する際に、あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列に対する特異値分解を、特異値分解装置において行うことができる。

【0008】

また、本発明による特異値分解装置は、2重対角行列Bが記憶される対角行列記憶部と、前記対角行列記憶部から前記2重対角行列Bを読み出し、当該2重対角行列Bを2個の2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積し、その2重対角行列を2個の2重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積する処理を、分割後の各2重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返す行列分割部と、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各2重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各2重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各2重対角行列の特異値と、前記各2重対角行列の特異ベクトルとを算出する特異値分解部と、前記特異値分解部によって特異値分解された特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部と、前記2重対角行列Bの特異値が記憶される特異値記憶部と、各2重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前

40

50

記行列要素とから、分割元の 2 重対角行列の特異値と、分割元の 2 重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異値を算出するまで繰り返し、前記 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異値を前記特異値記憶部に蓄積する特異値算出部と、前記 2 重対角行列 B の特異ベクトルが記憶される特異ベクトル記憶部と、前記対角行列記憶部から 2 重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、2 重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用いて 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出部と、を備えたものである。

【0009】

このような構成により、まず特異値を算出し、その特異値に基づいてツイスト分解法を用いて特異ベクトルを算出することによって、高速で高精度な特異値分解を実現することができる。また、並列性にも優れている。さらに、全ての特異値や特異ベクトルを算出する必要がない場合には、必要な範囲で特異値や特異ベクトルを算出ことができ、処理負荷を軽減することができる。

【0010】

また、本発明による特異値分解装置では、前記特異ベクトル算出部は、q d 型ツイスト分解法により特異ベクトルを算出してもよい。

このような構成により、高速で高精度な特異値分解を実現することができる。また、並列性にも優れている。

【0011】

また、本発明による特異値分解装置では、前記特異ベクトル算出部は、L V 型ツイスト分解法により特異ベクトルを算出してもよい。

このような構成により、数値安定的に特異ベクトルの算出を行うことができる。

【0012】

また、本発明による特異値分解装置では、前記特異ベクトル算出部は、前記対角行列記憶部から 2 重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、前記 2 重対角行列 B の各要素に関してミウラ変換、d L V v 型変換、逆ミウラ変換を行うことによって、前記 2 重対角行列 B を上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ にコレスキー分解するコレスキー分解部と、前記上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ の各要素と、前記 2 重対角行列 B の特異値とを用いて一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第 1 特異ベクトル算出部と、前記第 1 特異ベクトル算出部が算出した一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルと、前記 2 重対角行列 B の特異値と、前記 2 重対角行列 B とを用いて他方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第 2 特異ベクトル算出部と、をさらに備えてもよい。

このような構成により、コレスキー分解の処理において、複数の補助変数を用いることによって、数値安定的に特異ベクトルの算出を行うことができる。

【0013】

また、本発明による特異値分解装置では、前記コレスキー分解部は、複数のコレスキー分解手段を備え、前記複数のコレスキー分解手段が、前記 2 重対角行列 B をコレスキー分解する処理を並列実行してもよい。

このような構成により、コレスキー分解の処理を短時間で行うことができる。

【0014】

また、本発明による特異値分解装置では、前記第 1 特異ベクトル算出部は、複数の第 1 特異ベクトル算出手段を備え、前記複数の第 1 特異ベクトル算出手段が、特異ベクトルを算出する処理を並列実行してもよい。

このような構成により、特異ベクトルを算出する処理を短時間で行うことができる。

【0015】

また、本発明による特異値分解装置では、前記第 2 特異ベクトル算出部は、複数の第 2

10

20

30

40

50

特異ベクトル算出手段を備え、前記複数の第 2 特異ベクトル算出手段が、特異ベクトルを算出する処理を並列実行してもよい。

このような構成により、特異ベクトルを算出する処理を短時間で行うことができる。

【0016】

また、本発明による特異値分解装置では、前記特異値算出部は、複数の特異値算出手段を備え、前記複数の特異値算出手段が、分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を並列実行してもよい。

このような構成により、特異値を算出する処理を短時間で行うことができる。

【0017】

また、本発明による特異値分解装置では、前記特異値分解部は、複数の特異値分解手段を備え、前記複数の特異値分解手段が、2 重対角行列に対して特異値分解を行う処理を並列実行してもよい。

このような構成により、特異値分解する処理を短時間で行うことができる。

【0018】

また、本発明による特異値分解装置では、行列 A が記憶される行列記憶部と、前記行列 A を前記行列記憶部から読み出し、前記行列 A を 2 重対角化した前記 2 重対角行列 B を算出して前記対角行列記憶部に蓄積する対角化部と、をさらに備えてもよい。

このような構成により、任意の行列 A について特異値を算出することができる。また、2 重対角行列 B の特異ベクトルを用いることにより、行列 A の特異ベクトルを算出することもできる。

【0019】

また、本発明による特異値分解装置では、前記行列分割部は、2 重対角行列を略半分の 2 個の 2 重対角行列に分割してもよい。

このような構成により、並列処理を適切に行うことができる。

【発明の効果】

【0020】

本発明による特異値分解装置等によれば、高速で高精度な特異値分解を行うことができる。また、並列性にも優れている。

【発明を実施するための最良の形態】

【0021】

以下、本発明による特異値分解装置について、実施の形態を用いて説明する。なお、以下の実施の形態において、同じ符号を付した構成要素及びステップは同一または相当するものであり、再度の説明を省略することができる。

【0022】

(実施の形態 1)

本発明の実施の形態 1 による特異値分解装置について、図面を参照しながら説明する。

図 1 は、本実施の形態による特異値分解装置 1 の構成を示すブロック図である。図 1 において、本実施の形態による特異値分解装置 1 は、行列記憶部 11 と、対角化部 12 と、対角行列記憶部 13 と、行列分割部 14 と、特異値分解部 15 と、特異値分解記憶部 16 と、特異値算出部 17 と、特異値記憶部 18 と、特異ベクトル算出部 19 と、特異ベクトル記憶部 20 とを備える。

【0023】

行列記憶部 11 では、任意の行列 A が記憶される。この行列 A は、各要素が実数である実行列である。なお、行列 A が記憶されているとは、行列 A を示すデータが記憶されている、という意味である。後述する記憶部においても同様である。行列記憶部 11 は、所定の記録媒体（例えば、半導体メモリや磁気ディスク、光ディスクなど）によって実現される。行列記憶部 11 での記憶は、RAM 等における一時的な記憶でもよく、あるいは、長期的な記憶でもよい。行列記憶部 11 に行列 A が記憶される過程は問わない。例えば、記録媒体を介して行列 A が行列記憶部 11 で記憶されるようになってよく、通信回線を介して送信された行列 A が行列記憶部 11 で記憶されるようになってよく、あるいは

10

20

30

40

50

、キーボードやマウス等の入力デバイスを介して入力された行列 A が行列記憶部 1 1 で記憶されるようになってよい。

【 0 0 2 4 】

対角化部 1 2 は、行列 A を行列記憶部 1 1 から読み出し、その読み出した行列 A を 2 重対角化した 2 重対角行列 B を算出する。そして、対角化部 1 2 は、その算出した 2 重対角行列 B を対角行列記憶部 1 3 に蓄積する。対角化部 1 2 は、例えば、ハウスホルダー (Householder) 変換を必要なだけ繰り返し行う方法や、その他の 2 重対角化法を用いて、行列 A を 2 重対角化する。ここで、2 重対角行列 B は、上 2 重対角行列であってもよく、下 2 重対角行列であってもよい。本実施の形態では、2 重対角行列 B が上 2 重対角行列である場合について説明する。

10

【 0 0 2 5 】

対角行列記憶部 1 3 では、2 重対角行列 B が記憶される。対角行列記憶部 1 3 は、所定の記録媒体 (例えば、半導体メモリや磁気ディスク、光ディスクなど) によって実現される。対角行列記憶部 1 3 での記憶は、RAM 等における一時的な記憶でもよく、あるいは、長期的な記憶でもよい。

【 0 0 2 6 】

行列分割部 1 4 は、対角行列記憶部 1 3 から 2 重対角行列 B を読み出し、その 2 重対角行列 B を 2 個の 2 重対角行列に分割して対角行列記憶部 1 3 に蓄積する。行列分割部 1 4 は、その 2 重対角行列を 2 個の 2 重対角行列に分割して対角行列記憶部 1 3 に蓄積する処理を、分割後の各 2 重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで再帰的に繰り返す。

20

【 0 0 2 7 】

特異値分解部 1 5 は、あらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列を対角行列記憶部 1 3 から読み出し、その各 2 重対角行列に対して特異値分解を行い、各 2 重対角行列の特異値と、その各 2 重対角行列の特異ベクトルを算出する。特異値分解部 1 5 は、例えば、2 分法と逆反復法を組み合わせた方法、MR³法、QRs 法等を用いて特異値分解を行ってもよい。ここで、MR³法において、例えば、dqds や pqds 等の qds 法によって特異値を算出してもよい。また、QRs 法による特異値分解を行う場合には、FORTRAN において提供されている DBDSQR を用いてもよい。また、qds 法によって特異値を算出する場合には、FORTRAN において提供されている DLASQ を用いてもよい。

30

これらの特異値分解の方法については、すでに公知であり、その詳細な説明を省略する。特異値分解部 1 5 は、算出した特異値を特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。また、特異値分解部 1 5 は、算出した特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素も特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。特異ベクトルからなる左右直交行列とは、特異ベクトルを各列とする左直交行列、及び特異ベクトルを各列とする右直交行列のことである。行列要素の詳細については後述する。

【 0 0 2 8 】

特異値分解記憶部 1 6 では、特異値分解部によって特異値分解された特異値と、前述の行列要素とが記憶される。また、特異値分解記憶部 1 6 では、特異値算出部 1 7 によって算出された特異値や行列要素も記憶される。特異値分解記憶部 1 6 は、所定の記録媒体 (例えば、半導体メモリや磁気ディスク、光ディスクなど) によって実現される。特異値分解記憶部 1 6 での記憶は、RAM 等における一時的な記憶でもよく、あるいは、長期的な記憶でもよい。

40

【 0 0 2 9 】

特異値算出部 1 7 は、特異値分解部 1 5 によって算出された特異値と、行列要素とを特異値分解記憶部 1 6 から読み出し、その特異値と行列要素とから、分割元の 2 重対角行列の特異値と、分割元の 2 重対角行列の行列要素とを算出して特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。特異値算出部 1 7 は、その分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2 重対角行列 B の特異値を算出するまで再帰的に繰り返す。そして、特異値算

50

出部 17 は、算出した 2 重対角行列 B の特異値を特異値記憶部 18 に蓄積する。

【 0 0 3 0 】

特異値記憶部 18 では、2 重対角行列 B の特異値が記憶される。特異値記憶部 18 は、所定の記録媒体（例えば、半導体メモリや磁気ディスク、光ディスクなど）によって実現されうる。特異値記憶部 18 での記憶は、RAM 等における一時的な記憶でもよく、あるいは、長期的な記憶でもよい。

【 0 0 3 1 】

特異ベクトル算出部 19 は、対角行列記憶部 13 から 2 重対角行列 B を読み出し、特異値記憶部 18 から 2 重対角行列 B の特異値を読み出す。そして、特異ベクトル算出部 19 は、2 重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用いて 2 重対角行列 B の特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部 20 に蓄積する。特異ベクトル算出部 19 は、それらの処理を実行する、コレスキー分解部 21 と、第 1 特異ベクトル算出部 22 と、第 2 特異ベクトル算出部 23 とを備える。特異ベクトル算出部 19 は、LV 型ツイスト分解法により特異ベクトルを算出してもよく、あるいは、qd 型ツイスト分解法により特異ベクトルを算出してもよい。本実施の形態では、前者の場合について説明する。

10

【 0 0 3 2 】

コレスキー分解部 21 は、対角行列記憶部 13 から 2 重対角行列 B を読み出し、特異値記憶部 18 から 2 重対角行列 B の特異値を読み出す。そして、コレスキー分解部 21 は、2 重対角行列 B の各要素に関してミウラ変換、dLV 型変換、逆ミウラ変換を行うことにより、2 重対角行列 B を上 2 重対角行列 $B^{(+)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-)}$ に

20

【 0 0 3 3 】

第 1 特異ベクトル算出部 22 は、コレスキー分解部 21 が算出した上 2 重対角行列 $B^{(+)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-)}$ の各要素と、2 重対角行列 B の特異値とを用いて一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部 20 に蓄積する。

【 0 0 3 4 】

第 2 特異ベクトル算出部 23 は、特異値記憶部 18 から 2 重対角行列 B の特異値を読み出す。そして、第 2 特異ベクトル算出部 23 は、第 1 特異ベクトル算出部 22 が算出した一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルと、2 重対角行列 B の特異値と、2 重対角行列 B とを用いて他方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部 20 に蓄積する。このように、第 1 特異ベクトル算出部 22 と、第 2 特異ベクトル算出部 23 とによって、左右直交行列のそれぞれが算出されることになる。

30

【 0 0 3 5 】

特異ベクトル記憶部 20 では、2 重対角行列 B の特異ベクトルが記憶される。特異ベクトル記憶部 20 は、所定の記録媒体（例えば、半導体メモリや磁気ディスク、光ディスクなど）によって実現されうる。特異ベクトル記憶部 20 での記憶は、RAM 等における一時的な記憶でもよく、あるいは、長期的な記憶でもよい。

【 0 0 3 6 】

なお、行列記憶部 11、対角行列記憶部 13、特異値分解記憶部 16、特異値記憶部 18、特異ベクトル記憶部 20 の任意の 2 以上の記憶部は、同一の記録媒体によって実現されてもよく、あるいは、別々の記録媒体によって実現されてもよい。前者の場合には、例えば、行列 A の記憶されている領域が行列記憶部 11 となり、2 重対角行列 B 等の記憶されている領域が対角行列記憶部 13 となる。

40

【 0 0 3 7 】

また、行列記憶部 11、対角行列記憶部 13、特異値分解記憶部 16、特異値記憶部 18、特異ベクトル記憶部 20 の各記憶部は、2 以上の記録媒体から構成されてもよい。

【 0 0 3 8 】

次に、本実施の形態による特異値分解装置 1 の動作について、図 2 のフローチャートを用いて説明する。

50

(ステップ S 1 0 1) 対角化部 1 2 は、行列記憶部 1 1 で記憶されている行列 A を読み出し、その行列 A を 2 重対角化して 2 重対角行列 B を算出して対角行列記憶部 1 3 に蓄積する。

【 0 0 3 9 】

(ステップ S 1 0 2) 行列分割部 1 4、特異値分解部 1 5、特異値算出部 1 7 によって 2 重対角行列 B の特異値が算出され、特異値記憶部 1 8 に蓄積される。この処理の詳細については後述する。

【 0 0 4 0 】

(ステップ S 1 0 3) 特異ベクトル算出部 1 9 は、対角行列記憶部 1 3 から 2 重対角行列 B を読み出し、特異値記憶部 1 8 から 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、2 重対角行列 B の特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部 2 0 に蓄積する。この処理の詳細については後述する。

10

【 0 0 4 1 】

このようにして、2 重対角行列 B の特異値分解が終了する。ここで、行列 A の特異値は 2 重対角行列 B の特異値に等しいため、行列 A の特異値も算出されたことになる。また、後述するように、所定の変換を行うことによって、行列 A の特異ベクトルも 2 重対角行列 B の特異ベクトルから容易に算出することができる。

【 0 0 4 2 】

次に、図 2 のフローチャートのステップ S 1 0 2 の処理について、図 3 のフローチャートを用いて説明する。

20

(ステップ S 2 0 1) 行列分割部 1 4 は、対角行列記憶部 1 3 から 2 重対角行列 B を読み出し、その 2 重対角行列 B を 2 個の 2 重対角行列に分割して対角行列記憶部 1 3 に蓄積する。行列分割部 1 4 は、その 2 重対角行列を 2 個の 2 重対角行列に分割する処理を、分割後の各 2 重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返す。

【 0 0 4 3 】

(ステップ S 2 0 2) 特異値分解部 1 5 は、対角行列記憶部 1 3 で記憶されているあらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列について、特異値分解を行う。特異値分解部 1 5 は、特異値分解の結果である特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とを特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。

【 0 0 4 4 】

(ステップ S 2 0 3) 特異値算出部 1 7 は、2 重対角行列の特異値と、行列要素とを特異値分解記憶部 1 6 から読み出し、分割元の 2 重対角行列の特異値と、分割元の 2 重対角行列の行列要素とを算出して特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。特異値算出部 1 7 は、その分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2 重対角行列 B の特異値を算出するまで繰り返し、2 重対角行列 B の特異値を特異値記憶部 1 8 に蓄積する。このようにして、特異値を算出する処理が終了する。

30

【 0 0 4 5 】

次に、図 2 のフローチャートのステップ S 1 0 3 の処理について、図 4 のフローチャートを用いて説明する。

(ステップ S 3 0 1) コレスキー分解部 2 1 は、対角行列記憶部 1 3 から 2 重対角行列 B を読み出し、特異値記憶部 1 8 から 2 重対角行列 B の特異値を読み出す。そして、コレスキー分解部 2 1 は、2 重対角行列 B の各要素に関してミウラ変換、d L V v 型変換、逆ミウラ変換を行うことによって、2 重対角行列 B を上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ にコレスキー分解する。

40

【 0 0 4 6 】

(ステップ S 3 0 2) 第 1 特異ベクトル算出部 2 2 は、上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ の各要素を用いて、一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出する。本実施の形態では、第 1 特異ベクトル算出部 2 2 は、右直交行列を構成する右特異ベクトルを算出するものとする。

【 0 0 4 7 】

50

(ステップ S 3 0 3) 第 1 特異ベクトル算出部 2 2 は、算出した特異ベクトルを正規化する。すなわち、第 1 特異ベクトル算出部 2 2 は、算出した特異ベクトルのノルムを算出し、特異ベクトルを算出したノルムで割ったものを最終的な特異ベクトルとして特異ベクトル記憶部 2 0 に蓄積する。

【 0 0 4 8 】

(ステップ S 3 0 4) 第 2 特異ベクトル算出部 2 3 は、第 1 特異ベクトル算出部 2 2 が算出した特異ベクトルと、2 重対角行列 B の特異値と、2 重対角行列 B とを用いて、第 1 特異ベクトル算出部 2 2 が算出した特異ベクトルと異なる方の特異ベクトルを算出する。2 重対角行列 B を特異値分解した結果が、第 1 特異ベクトル算出部 2 2 が算出した特異ベクトルからなる直交行列と、第 2 特異ベクトル算出部 2 3 が算出する特異ベクトルからなる直交行列と、特異値記憶部 1 8 が記憶している特異値であるため、その性質を用いて、第 2 特異ベクトル算出部 2 3 は、特異ベクトルを算出することができる。

10

【 0 0 4 9 】

(ステップ S 3 0 5) 第 2 特異ベクトル算出部 2 3 は、算出した特異ベクトルを正規化する。すなわち、第 2 特異ベクトル算出部 2 3 は、算出した特異ベクトルのノルムを算出し、特異ベクトルを算出したノルムで割ったものを最終的な特異ベクトルとして特異ベクトル記憶部 2 0 に蓄積する。このようにして、2 重対角行列 B を特異値分解する処理は終了となる。

なお、この後に、行列記憶部 1 1 が記憶している行列 A の特異ベクトルを算出する処理が行われてもよいが、ここでは省略している。

20

【 0 0 5 0 】

また、特異ベクトル算出部 1 9 が算出した特異ベクトルの精度を上げるために、図 5 で示されるように、特異ベクトルに関する処理を実行してもよく、あるいは、実行しなくてもよい。すなわち、図示しない逆反復法処理部は、特異ベクトル記憶部 2 0 から特異ベクトル算出部 1 9 が算出した特異ベクトルを読み出し、その特異ベクトルに対して逆反復法の処理を実行し、その結果の特異ベクトルを特異ベクトル記憶部 2 0 に蓄積する(ステップ S 4 0 1)。次に、図示しないグラムシュミット処理部は、高精度が必要かどうか判断する(ステップ S 4 0 2)。この判断は、あらかじめ高精度が必要かどうか設定されている記録媒体等から、その設定を読み出すことによって判断してもよい。そして、図示しないグラムシュミット処理部は、高精度が必要な場合には、特異ベクトル記憶部 2 0 から逆反復法の処理の実行された特異ベクトルを読み出し、その特異ベクトルに対してグラムシュミット法の処理を実行し、その結果の特異ベクトルを特異ベクトル記憶部 2 0 に蓄積する(ステップ S 4 0 3)。なお、逆反復法や、グラムシュミット法については、すでに公知であり、その詳細な説明を省略する。

30

【 0 0 5 1 】

次に、本実施の形態による特異値分解装置 1 の動作について、以下、より詳細に説明する。

[行列 A の対角化]

行列 A は、例えば、ハウスホルダー変換等を用いて、以下に示されるように 2 重対角化することができることが知られている。ここでは、上 2 重対角化する場合について示すが、下 2 重対角化も同様にして行うことができる。ここで、2 重対角行列 B は、行の数と列の数とが一致する正方行列である。

40

【 数 1 】

$$U_H^T A V_H = \begin{cases} (B \ 0) & (l_1 \leq l_2) \\ \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} & (l_1 \geq l_2) \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & & \\ & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{2m-2} \\ 0 & & & b_{2m-1} \end{pmatrix}$$

ただし、A は $l_1 \times l_2$ 実行列、 U_H, V_H は直交行列、 $m = \min(l_1, l_2)$ である。

50

【 0 0 5 2 】

したがって、対角化部 1 2 は、上記のようにして、行列記憶部 1 1 から行列 A を読み出し、2 重対角行列 B を算出することができる。その算出された 2 重対角行列は、対角行列記憶部 1 3 で記憶される（ステップ S 1 0 1）。

【 0 0 5 3 】

[2 重対角行列 B の分割]

2 重対角行列 B を分割する処理について説明する。まず、図 6 で示されるように、上 2 重対角行列であって、正方行列である B の右端に、全ての要素が 0 である列を加えたものを新たに上 2 重対角行列 B とする。なお、この新たな 2 重対角行列 B の特異値は、元の正方行列である 2 重対角行列 B の特異値と同じである。したがって、今後、この新たな $n \times (n + 1)$ 行列の特異値を求める処理について説明する。

10

【 0 0 5 4 】

図 7 で示されるように、 $n \times (n + 1)$ の上 2 重対角行列 B が与えられた場合に、それらを 2 個の上 2 重対角行列と、2 個の要素（図 7 では、 b_7, b_8 ）とに分けることができる。したがって、上 2 重対角行列 B は、以下のように分割されることになる。

【 数 2 】

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ b_{2k-1} \mathbf{e}_k^T & b_{2k} \mathbf{e}_1^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \quad (\text{式 1})$$

20

【 0 0 5 5 】

ただし、上 2 重対角行列 B が $n \times (n + 1)$ 行列であるため、上 2 重対角行列 B_1 は、 $(k - 1) \times k$ 行列であり、上 2 重対角行列 B_2 は、 $(n - k) \times (n - k + 1)$ 行列である。k は、 $1 < k < n$ となる整数である。 \mathbf{e}_j は、適切な次元における j 番目の単位ベクトルである。ここで、並列処理を適切に実行するためには、k を、 $n / 2$ を超えない最大の整数にとるか、あるいは、 $n / 2$ を下まわらない最小の整数にとることが好適である（この k の値を用いて行列を 2 個の行列に分割する場合を、「行列を略半分の 2 個の行列に分割する」と呼ぶことにする）。

【 数 3 】

$$k = \lfloor n/2 \rfloor$$

30

本実施の形態では、k を上式のようにとるものとする。なお、k の値は、前述のように、 $1 < k < n$ の範囲内で任意であることは言うまでもない。

【 0 0 5 6 】

したがって、行列分割部 1 4 は、上述のようにして、対角行列記憶部 1 3 が記憶している上 2 重対角行列 B を 2 個の上 2 重対角行列と、2 個の要素に分割することができ、その分割の処理を繰り返すことができる。図 8 は、図 3 のフローチャートのステップ S 2 0 1 における行列分割部 1 4 による行列を分割する処理を示すフローチャートである。

【 0 0 5 7 】

（ステップ S 5 0 1）行列分割部 1 4 は、カウンタ I を「1」に設定する。

40

（ステップ S 5 0 2）行列分割部 1 4 は、対角行列記憶部 1 3 から I 番目の分割をしていない 2 重対角行列を読み出し、その 2 重対角行列を 2 個の 2 重対角行列と、2 個の要素とに分割する。そして、行列分割部 1 4 は、分割した 2 個の 2 重対角行列と、2 個の要素とを対角行列記憶部 1 3 に蓄積する。

【 0 0 5 8 】

（ステップ S 5 0 3）行列分割部 1 4 は、I 番目の分割を行っていない 2 重対角行列が、対角行列記憶部 1 3 で記憶されているかどうか判断する。そして、I 番目の分割を行っていない 2 重対角行列が、対角行列記憶部 1 3 で記憶されている場合には、ステップ S 5 0 2 に戻り、そうでない場合には、ステップ S 5 0 4 に進む。

【 0 0 5 9 】

50

(ステップ S 5 0 4) 行列分割部 1 4 は、I 番目の分割を行った 2 重対角行列の大きさがあらかじめ決められている大きさ以下かどうか判断する。行列分割部 1 4 は、例えば、目的とする行列の大きさ (例えば、 25×26 など) の記憶されている図示しない記録媒体から、その目的とする行列の大きさを読み出し、対角行列記憶部 1 3 で記憶されている、I 番目の分割後の 2 重対角行列がその大きさ以下であるかどうかを判断してもよい。そして、I 番目の分割を行った 2 重対角行列の大きさがあらかじめ決められている大きさ以下である場合には、2 重対角行列を分割する処理は終了となり、そうでない場合には、ステップ S 5 0 5 に進む。

(ステップ S 5 0 5) 行列分割部 1 4 は、カウンタ I を 1 だけインクリメントする。そして、ステップ S 5 0 2 に戻る。

【0060】

なお、この図 8 のフローチャートでは、上述のように、行列分割部 1 4 が各行列を、略半分の 2 個の行列に分割するため、I 番目の分割後の各 2 重対角行列の大きさがほとんど同じである場合について説明したが、行列分割部 1 4 が各行列を、略半分の 2 個の行列に分割しない場合には、行列分割部 1 4 は、分割後の各行列があらかじめ決められた大きさ以下となるように、分割を繰り返すものとする。

【0061】

また、図 8 のフローチャートでは、ステップ S 5 0 4 において、行列分割部 1 4 が、対角行列記憶部 1 3 で記憶されている分割後の行列の大きさをあらかじめ決められた大きさと比較する処理を実行する場合について説明したが、これは一例であって、行列分割部 1 4 は、ステップ S 5 0 4 において、それ以外の処理を行ってもよい。例えば、上述のように、行列分割部 1 4 が各行列を、略半分の 2 個の行列に分割する場合には、元の 2 重対角行列 B の大きさを知ることができれば、何番目の分割で目的とする行列の大きさとなるのかを知ることができる。したがって、N 番目 (N は 1 以上の整数) の分割で目的とする行列の大きさとなる場合には、ステップ S 5 0 4 において、I が N であるかどうかを比較し、N でなければステップ S 5 0 5 に進み、N であれば一連の処理を終了するようにしてもよい。

【0062】

図 9 は、行列の分割について説明するための図である。まず、行列分割部 1 4 は、1 番目の分割として、2 重対角行列 B を、2 重対角行列 B_1 と、2 重対角行列 B_2 とに分割する (ステップ S 5 0 1, S 5 0 2)。2 重対角行列 B は、1 個しかいないため、行列分割部 1 4 は、1 番目の分割をしていない行列がないと判断する (ステップ S 5 0 3)。また、2 重対角行列 B_1 等はあらかじめ決められた大きさ以下の行列でないとすると (ステップ S 5 0 4)、行列分割部 1 4 は、2 番目の分割として、2 重対角行列 B_1 を、2 重対角行列 B_{11} と、2 重対角行列 B_{12} とに分割する (ステップ S 5 0 5, S 5 0 2)。この場合には、2 番目の分割を行っていない 2 重対角行列 B_2 が存在するため、行列分割部 1 4 は、2 重対角行列 B_2 も、2 重対角行列 B_{21} と、2 重対角行列 B_{22} とに分割する (ステップ S 5 0 3, S 5 0 2)。このようにして、分割後の各 2 重対角行列が目的とする大きさ以下になるまで、行列を分割する処理が繰り返される。なお、図 9 では、2 重対角行列以外の 2 個の要素については省略している。また、図 9 において、各 2 重対角行列は、列の数が行の数よりも 1 だけ大きい行列である。

【0063】

[分割された行列の特異値分解]

行列 B_i が $n \times (n + 1)$ 行列であるとすると、行列 B_i の特異値分解は、次のようになる。

【数 4】

$$B_i = U_i (D_i \quad 0) (V_i \quad \mathbf{v}_i)^T$$

【0064】

ここで、 D_i は、 $n \times n$ の対角行列である。($D_i \quad 0$) は、行列 D_i の右側に全ての要

10

20

30

40

50

素が 0 の列が 1 つある行列である。D_i の各対角成分は B_i の特異値である。また、v_i は、行列 B_i の特異値分解における右直交行列の一番右側のベクトルである。V_i は、行列 B_i の特異値分解における右直交行列の v_i をのぞいた行列である。(V_i v_i)^T は、全体として (n + 1) × (n + 1) の行列である。

【 0 0 6 5 】

したがって、特異値分解部 1 5 は、対角行列記憶部 1 3 から分割後の各上 2 重対角行列を読み出し、上記のようにして、特異値分解を行う (ステップ S 2 0 2)。特異値分解の方法として、例えば、2 分法と逆反復法を組み合わせた方法、MR³法、QRs 法等を用いてもよいことは前述の通りである。図 9 で示されるように上 2 重対角行列の分割が行われた場合には、特異値分解部 1 5 は、各 2 重対角行列 B_{1 1 1}, B_{1 1 2}, B_{1 2 1}, B_{1 2 2}, …, B_{2 2 2} に対して特異値分解を行うことになる。なお、特異値分解部 1 5 は、特異値分解の結果得られた各特異値と、特異値分解の結果得られた左右直交行列の一部の要素である行列要素とを特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。ここで、行列要素が、左右直交行列のどの要素を含むのかについては後述する。

10

【 0 0 6 6 】

[特異値の算出]

まず、図 1 0 で示されるように、分割された 2 個の 2 重対角行列 B₁, B₂ から、分割元の 2 重対角行列 B₀ の特異値等を算出する処理について説明する。2 重対角行列 B₁, B₂ は、次のように特異値分解されていたとする。ここで、2 重対角行列 B₁, B₂ は、

20

【 数 5 】

$$B_1 = U_1(D_1 \ 0)(V_1 \ v_1)^T$$

$$B_2 = U_2(D_2 \ 0)(V_2 \ v_2)^T$$

【 0 0 6 7 】

この場合に、分割元の 2 重対角行列 B₀ は、次のようになる。

【 数 6 】

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & U_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{2k-1}\psi_1 & b_{2k-1}\mathbf{l}_1 & b_{2k}\mathbf{f}_2 & b_{2k}\phi_2 \\ 0 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & V_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}^T$$

30

ただし、 \mathbf{l}_1 は V₁ の最後の行である。ψ₁ は v₁ の最後の要素である。

f₂ は V₂ の最初の行である。φ₂ は v₂ の最初の要素である。

【 0 0 6 8 】

また、上式の b_{2k-1} 等は 2 重対角行列の分割の処理において説明した行列の要素である。ここで、Givens 変換を行い、b_{2k-2} を 0 にすると、次のようになる。

【 数 7 】

40

$$B_0 = \tilde{U}(M \ 0)(\tilde{V} \ \tilde{\mathbf{v}})^T$$

【 0 0 6 9 】

ただし、

【数 8】

$$\tilde{U} \equiv \begin{pmatrix} 0 & U_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_2 \end{pmatrix}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} r_0 & b_{2k-1}\mathbf{l}_1 & b_{2k}\mathbf{f}_2 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V} \equiv \begin{pmatrix} c_0\mathbf{v}_1 & V_1 & 0 \\ s_0\mathbf{v}_2 & 0 & V_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}} \equiv \begin{pmatrix} -s_0\mathbf{v}_1 \\ c_0\mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$r_0 = \sqrt{(b_{2k-1}\Psi_1)^2 + (b_{2k}\Phi_2)^2}, \quad c_0 = \frac{b_{2k-1}\Psi_1}{r_0}, \quad s_0 = \frac{b_{2k}\Phi_2}{r_0}$$

10

である。したがって、行列 B_0 は、

【数 9】

$$\tilde{U}, \quad (\tilde{V} \quad \tilde{\mathbf{v}})^T$$

によって、 $(M \quad 0)$ に直交変換される。これらより、行列 B_0 の特異値分解を行うためには、行列 M の特異値分解を行えばよいことになる。ここで、 $n \times n$ の行列 M を次のようにおく。

【数 10】

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

20

【0070】

上記の行列 M において、 z_i 、 d_j 以外の各要素は 0 である。ただし、 $i = 1, 2, \dots, n$ 、 $j = 2, 3, \dots, n$ である。この行列 M の特異値分解は、次の定理によって行うことができる。

(定理 1)

【数 1 1】

M の特異値分解を $U\Sigma V^T$ とし、

$U = (u_1, \dots, u_n)$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $V = (v_1, \dots, v_n)$ とすると、

特異値 $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$ は、

$$0 = d_1 < \sigma_1 < d_2 < \dots < d_n < \sigma_n < d_n + \|z\|_2$$

を満たす。また、特異値の方程式は、

$$f(\sigma_i) \equiv 1 + \sum_{j=1}^n \frac{z_j^2}{d_j^2 - \sigma_i^2} = 0 \quad (\text{式 2})$$

となる。特異ベクトルは、

$$u_i = \frac{\left(-1, \frac{d_2 z_2}{d_2^2 - \sigma_i^2}, \dots, \frac{d_n z_n}{d_n^2 - \sigma_i^2} \right)^T}{\sqrt{1 + \sum_{k=2}^n \frac{(d_k z_k)^2}{(d_k^2 - \sigma_i^2)^2}}} \quad (\text{式 3})$$

$$v_i = \frac{\left(\frac{z_1}{d_1^2 - \sigma_i^2}, \dots, \frac{z_n}{d_n^2 - \sigma_i^2} \right)^T}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{z_k^2}{(d_k^2 - \sigma_i^2)^2}}} \quad (\text{式 4})$$

となる。

【0 0 7 1】

ここで、計算機によって求めることができるのは、行列 M の真の特異値ではなく、誤差を含む近似値である。したがって、

【数 1 2】

$$\frac{z_k}{d_k^2 - \hat{\sigma}_i^2}, \frac{d_k z_k}{d_k^2 - \hat{\sigma}_i^2} \quad (\text{ただし、}\hat{\sigma}_i\text{は計算機による近似値)}$$

は、真の値である

【数 1 3】

$$\frac{z_k}{d_k^2 - \sigma_i^2}, \frac{d_k z_k}{d_k^2 - \sigma_i^2}$$

と大きく異なる可能性がありうる。すなわち、上記のように計算した場合には、特異ベクトルの計算が数値不安定となることがある。この欠点は、次の定理によって克服できる。

【0 0 7 2】

(定理 2)

10

20

30

40

【数 1 4】

対角行列 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ が与えられ、

$0 \equiv d_1 < \hat{\sigma}_1 < d_2 < \dots < d_n < \hat{\sigma}_n$ を満たす集合 $\{\hat{\sigma}_i\}_{i=1}^n$ が与えられると、

特異値が $\{\hat{\sigma}_i\}_{i=1}^n$ である行列

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \dots & \hat{z}_n \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

10

が存在する。ベクトル $\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_n)^T$ は、次式で与えられる。

$$|\hat{z}_i| = \sqrt{(\hat{\sigma}_n^2 - d_i^2) \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(\hat{\sigma}_k^2 - d_i^2)}{(d_k^2 - d_i^2)} \prod_{k=i}^{n-1} \frac{(\hat{\sigma}_k^2 - d_i^2)}{(d_{k+1}^2 - d_i^2)}} \quad (\text{式 5})$$

ここで、 \hat{z}_i の符号は任意である。

【0 0 7 3】

したがって、定理 1 を用いて行列 M の近似特異値を算出した後に、定理 2 を用いて、その近似特異値を真の特異値とする行列 M を再構成する。特異ベクトルは、上記の式 5 を用いて算出した

20

【数 1 5】

$$\hat{z}_i$$

と、上記の式 2 を用いて算出した

【数 1 6】

$$\hat{\sigma}_i$$

とを上記の式 3 , 式 4 に代入することによって数値安定的に求めることができる。このようにして、次のように行列 M の特異値分解が求められたとする。

【数 1 7】

$$M = U_M \Sigma V_M^T$$

ただし、 $U_M = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)$, $\Sigma = \text{diag}(\hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_n)$, $V_M = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$ とする。

\hat{u}_i, \hat{v}_i はそれぞれ、 $\hat{z}_i, \hat{\sigma}_i$ を用いて算出された u_i, v_i である。

【0 0 7 4】

すると、 B_0 の特異値分解は以下ようになる。

【数 1 8】

$$\begin{aligned} B_0 &= \tilde{U} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} & \tilde{v} \end{pmatrix}^T \\ &= \tilde{U} \begin{pmatrix} U_M \Sigma V_M^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} & \tilde{v} \end{pmatrix}^T \\ &= \tilde{U} U_M \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{V} & \tilde{v} \end{pmatrix}^T \\ &= U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} V_M & \tilde{v} \end{pmatrix}^T \\ &= U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T \end{aligned}$$

40

【0 0 7 5】

このように、対象となる行列を 2 個の副行列に分割し、その分割した後の各副行列について特異値分解を行う処理を再帰的に行うことによって特異値分解を行う方法は、分割統治法 (Divide and Conquer : D&C) と呼ばれている。

50

【 0 0 7 6 】

分割統治法では、特異ベクトルまで算出することになり、その特異ベクトルを算出する処理において行列の計算をしなければならないため、非常に負荷の大きい処理となる。分割統治法において特異値分解をする場合には、例えば、計算時間の95%程度が特異ベクトルを算出するベクトル更新の処理（例えば、上述のように、行列Mの左右直交行列から、行列 B_0 の左右直交行列を算出するために行列を掛け合わせる処理）に費やされることもありうる。

【 0 0 7 7 】

一方、特異値のみを算出する場合には、上記処理を簡略化することができる。次に、その方法について説明する。上記の結果より、次のようになる。

【 数 1 9 】

$$\begin{aligned} B_0 &= \tilde{U} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V} & \tilde{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{V}_{V_M} & \tilde{v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= U \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} c_0 \mathbf{v}_1 & V_1 & 0 \\ s_0 \mathbf{v}_2 & 0 & V_2 \end{pmatrix} V_M \begin{pmatrix} -s_0 \mathbf{v}_1 \\ c_0 \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \right)^T \end{aligned}$$

【 0 0 7 8 】

これより、

【 数 2 0 】

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} c_0 \phi_1 & \mathbf{f}_1 & 0 \end{pmatrix} V_M \quad (\text{式 6})$$

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} s_0 \psi_2 & 0 & \mathbf{l}_2 \end{pmatrix} V_M \quad (\text{式 7})$$

$$\phi = -s_0 \phi_1 \quad (\text{式 8})$$

$$\psi = c_0 \psi_2 \quad (\text{式 9})$$

ただし、 \mathbf{f}_1 は V_1 の最初の行、 ϕ_1 は \mathbf{v}_1 の最初の要素、 \mathbf{l}_2 は V_2 の最後の行、

\mathbf{l} は V の最後の行、 ψ は \mathbf{v} の最後の要素、 \mathbf{f} は V の最初の行、

ϕ は \mathbf{v} の最初の要素とする。

となる。ここで、 \mathbf{f} と ϕ とは、行列 B_0 を特異値分解した結果の右直交行列の最初の行の各要素である。また、 \mathbf{l} と ψ とは、行列 B_0 を特異値分解した結果の右直交行列の最後の行の各要素である。この右直交行列の最初の行の各要素と、最後の行の各要素とが行列要素となる。

【 0 0 7 9 】

上記の結果から、図10で示されるように、行列 B_1 、 B_2 から分割元の行列 B_0 を構成する場合に、行列 B_0 について、

【 数 2 1 】

$$\hat{\sigma}_i, \hat{z}_i, V_M, \mathbf{f}, \mathbf{l}, \phi, \psi$$

をそれぞれ算出することができる。このような処理を繰り返すことにより、最終的に、行列Aを2重対角化した2重対角行列Bの特異値を算出することができる。

【 0 0 8 0 】

したがって、特異値算出部17は、上述のようにして、特異値分解記憶部16から特異値と行列要素とを読み出し、対角行列記憶部13から行列の分割時に発生した2個の要素(b_{2k-1} 、 b_{2k})を読み出し、それらを用いることによって、分割元の2重対角行列の特異値と行列要素とを算出する。そして、それらを算出する処理を繰り返すことによって、最終的に2重対角行列Bの特異値を算出する。図11は、図3のフローチャートのステップS203における特異値算出部17が特異値を算出する処理を示すフローチャートである。

10

20

30

40

50

【 0 0 8 1 】

(ステップ S 6 0 1) 特異値算出部 1 7 は、カウンタ J を「 1 」に設定する。

(ステップ S 6 0 2) 特異値算出部 1 7 は、J 番目の特異値の算出は最後の特異値の算出であるかどうか判断する。ここで、最後の特異値の算出とは、2 重対角行列 B の特異値を算出することである。そして、最後の特異値の算出である場合には、ステップ S 6 0 6 に進み、そうでない場合には、ステップ S 6 0 3 に進む。

【 0 0 8 2 】

(ステップ S 6 0 3) 特異値算出部 1 7 は、分割元の 2 重対角行列の特異値等を算出する。この処理の詳細については後述する。

(ステップ S 6 0 4) 特異値算出部 1 7 は、J 番目の特異値の算出において、分割元の全ての 2 重対角行列の特異値等を算出したかどうか判断する。そして、J 番目の特異値の算出において、分割元の全ての 2 重対角行列の特異値等を算出した場合には、ステップ S 6 0 5 に進み、そうでない場合には、ステップ S 6 0 3 に戻る。

10

【 0 0 8 3 】

(ステップ S 6 0 5) 特異値算出部 1 7 は、カウンタ J を 1 だけインクリメントする。そして、ステップ S 6 0 2 に戻る。

(ステップ S 6 0 6) 特異値算出部 1 7 は、2 重対角行列 B の特異値を算出し、その算出した特異値を特異値記憶部 1 8 に蓄積する。このようにして、2 重対角行列 B の特異値を算出する一連の処理は終了となる。

20

【 0 0 8 4 】

図 1 2 は、図 1 1 のフローチャートにおけるステップ S 6 0 3 の詳細な処理を示すフローチャートである。

(ステップ S 7 0 1) 特異値算出部 1 7 は、分割元の行列の特異値を式 2 を用いて算出する。そして、特異値算出部 1 7 は、算出した特異値を特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。

【 0 0 8 5 】

(ステップ S 7 0 2) 特異値算出部 1 7 は、ステップ S 7 0 1 で算出した特異値を用いて、式 5 の z を算出する。

(ステップ S 7 0 3) 特異値算出部 1 7 は、ステップ S 7 0 1 で算出した特異値と、ステップ S 7 0 2 で算出した z とを用いて、式 4 の v_i を算出する。この v_i を算出することにより、 v_i を列ベクトルに有する V_M を算出したことになる。そして、特異値算出部 1 7 は、算出した V_M を特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。

30

【 0 0 8 6 】

(ステップ S 7 0 4) 特異値算出部 1 7 は、式 6 から式 9 を用いて、分割元の行列に関する行列要素を算出する。そして、特異値算出部 1 7 は、算出した分割元の行列要素を特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する。このようにしてステップ S 6 0 3 の処理は終了となる。

【 0 0 8 7 】

図 1 3 は、特異値を算出する処理について説明するための図である。特異値分解記憶部 1 6 では、特異値分解部 1 5 によって行列 B_{111} , B_{112} , \dots , B_{222} が特異値分解された結果、すなわち、それらの特異値と、行列要素とが記憶されているものとする。まず、特異値算出部 1 7 は、特異値等の 1 番目の算出を開始する (ステップ S 6 0 1, S 6 0 2)。ここで、特異値等の 1 番目の算出とは、図 1 3 の一番下の行の行列の特異値と、行列要素とから、下から 2 番目の行の行列の特異値と、行列要素とを算出することである。特異値算出部 1 7 は、行列 B_{111} と、行列 B_{112} との各特異値、及び行列 B_{111} と、行列 B_{112} との各行列要素を特異値分解記憶部 1 6 から読み出す。また、行列 B_{111} を行列 B_{111} と、行列 B_{112} とに分解したときに発生した 2 個の要素を対角行列記憶部 1 3 から読み出す。そして、特異値算出部 1 7 は、それらの値を用いて、行列 B_{111} の特異値を算出して特異値分解記憶部 1 6 に蓄積する (ステップ S 7 0 1)。次に、特異値算出部 1 7 は、行列 B_{111} の特異値を用いて z の値を算出する (ステップ S 7 0 2)。特異値算出部 1 7 は、行列 B_{111} の特異値と、 z の値とを用いて直交行列 V_M を算出

40

50

して特異値分解記憶部 16 に蓄積する (ステップ S 7 0 3)。最後に、特異値算出部 17 は、行列 B_{11} の行列要素を算出して特異値分解記憶部 16 に蓄積する (ステップ S 7 0 4)。

【 0 0 8 8 】

特異値等の 1 番目の算出はまだ終わっていないため (ステップ S 6 0 4)、特異値算出部 17 は、上記説明と同様にして、行列 B_{121} 、行列 B_{122} の特異値、行列要素等に基づいて、行列 B_{12} の特異値、行列要素を算出する (ステップ S 6 0 2, S 6 0 3)。このようにして、特異値等の 1 番目の算出が終了すると、特異値算出部 17 は、特異値等の 2 番目の算出、すなわち、行列 B_{11} 、行列 B_{12} の特異値、行列要素等に基づいて行列 B_1 の特異値、行列要素の算出を行う (ステップ S 6 0 4, S 6 0 5, S 6 0 2, S 6 0 3)。その後、特異値算出部 17 は、同様にして、行列 B_{21} 、行列 B_{22} の特異値、行列要素等に基づいて行列 B_2 の特異値、行列要素の算出を行う (ステップ S 6 0 4, S 6 0 3)。

10

【 0 0 8 9 】

特異値算出部 17 が特異値等の 2 番目の算出を終了すると (ステップ S 6 0 4)、次の特異値等の算出は、2 重対角行列 B の特異値を求める最後の処理となるため (ステップ S 6 0 5, S 6 0 2)、特異値算出部 17 は、特異値の算出のみを行い、その算出した特異値を特異値記憶部 18 に蓄積する (ステップ S 6 0 6)。このようにして、特異値の算出が終了する。

20

【 0 0 9 0 】

[特異値からの特異ベクトルの算出]

まず、行列 $B^T B$ を考える。ここで、行列 B は、前述の $n \times n$ の上 2 重対角行列である。この行列 $B^T B$ を次のように対角化したとする。

【 数 2 2 】

$$\Lambda = V^T B^T B V$$

ただし、 $\Lambda \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$)

$$V \equiv (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

λ_j は $B^T B$ の固有値であり、 x_j は固有値 λ_j に対する固有ベクトルである。

30

【 0 0 9 1 】

ここで、一般に次のことが成り立つ。

(1) 行列 $B^T B$ は対称な 3 重対角行列である。

(2) 行列 $B^T B$ の固有値は全て正であり、行列 B の特異値 σ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) は、行列 $B^T B$ の固有値と次の関係を有する。

【 数 2 3 】

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$$

(3) $V_B = V$ である。ただし、 V_B は行列 B の右直交行列である。したがって、行列 $B^T B$ の固有ベクトル x_j は、行列 B の右特異ベクトルに等しい。

40

【 0 0 9 2 】

したがって、行列 $B^T B$ の固有ベクトルを求めると、行列 B の右直交行列が求まることになる。さらに、行列 B の固有値分解を、

【 数 2 4 】

$$U_B \Sigma V_B^T = B$$

とする。すると、右直交行列 V_B が求まり、特異値を対角成分に有する行列 Σ が求まることよって、

【数 2 5】

$$U_B = BV_B \Sigma^{-1}$$

から、左直交行列も求まることになり、行列 B が特異値分解される。したがって、行列 B の特異ベクトルを求めることは、行列 $B^T B = T_S$ の固有ベクトルを求めることに置き換えることができる。すなわち、次の方程式の固有ベクトル x_j を求めればよいことになる。

【数 2 6】

$$(B^T B - \sigma_j^2 I) x_j = \gamma_k e_k \quad (j=1,2,\dots,m)$$

ただし、行列 B は $m \times m$ 行列である。

e_k は、 k 番目の要素が 1 で他の要素が 0 のベクトルである。

(e_k は、単位行列 I の k 番目の列である)

10

【0 0 9 3】

本来であれば、上記式の右辺は 0 になるはずであるが、行列 B の特異値を算出するときに、いくらかの誤差を含むため、特異ベクトル x_j が真値であれば、上記のように右辺に残差項が存在する。

【0 0 9 4】

ここで、以下のようにコレスキー分解できたとする。

20

【数 2 7】

$$B^T B - \sigma_j^2 I = \begin{cases} (B^{(+1)})^T B^{(+1)} \\ (B^{(-1)})^T B^{(-1)} \end{cases}$$

$$B^{(n)} \equiv \begin{pmatrix} b_1^{(n)} & b_2^{(n)} & & & \\ & b_3^{(n)} & \ddots & & \\ & & \ddots & b_{2m-2}^{(n)} & \\ \mathbf{0} & & & & b_{2m-1}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (n=0,+1),$$

$$B^{(0)} \equiv B$$

30

$$B^{(-1)} \equiv \begin{pmatrix} b_1^{(-1)} & & & & \mathbf{0} \\ b_2^{(-1)} & b_3^{(-1)} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & b_{2m-2}^{(-1)} & b_{2m-1}^{(-1)} & \end{pmatrix}$$

$$b_{2k-1}^{(n)} \equiv \xi_k^{(n)} \sqrt{q_k^{(n)}}, \quad b_{2k}^{(n)} \equiv \eta_k^{(n)} \sqrt{e_k^{(n)}},$$

$$(\xi_k^{(n)})^2 = 1, \quad (\eta_k^{(n)})^2 = 1, \quad (n=0,+1,-1),$$

$$\xi_k^{(1)} \eta_k^{(1)} = \xi_k^{(0)} \eta_k^{(0)}, \quad \xi_{k+1}^{(-1)} \eta_k^{(-1)} = \xi_k^{(0)} \eta_k^{(0)}$$

40

【0 0 9 5】

すると、次式のように書ける。

【数 2 8】

$$B^T B - \sigma_j^2 I = \begin{cases} LD^+ L^T \\ UD^- U^T \end{cases}$$

ただし、 L, U, D は以下の通りである。

$$L \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ L_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & L_{m-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad L_k \equiv \frac{b_{2k}^{(+1)}}{b_{2k-1}^{(+1)}} \quad 10$$

$$U \equiv \begin{pmatrix} 1 & U_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & U_{m-1} \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad U_k \equiv \frac{b_{2k}^{(-1)}}{b_{2k+1}^{(-1)}}$$

$$D^\pm \equiv \text{diag}(D_1^\pm, D_2^\pm, \dots, D_m^\pm), \quad D_k^\pm \equiv (b_{2k-1}^{(\pm)})^2$$

【0 0 9 6】

そして、次のようになる。

【数 2 9】

20

$$B^T B - \sigma_j^2 I = N_k D_k (N_k)^T$$

$$N_k \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ L_1 & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & L_{k-1} & 1 & U_k & & \\ & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & U_m & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad 30$$

$$D_k \equiv \text{diag}(D_1^+, D_2^+, \dots, D_{k-1}^+, \gamma_k, D_{k+1}^-, \dots, D_m^-)$$

【0 0 9 7】

ここで、行列 N_k をツイスト行列と呼ぶ。また、

【数 3 0】

$$D_k \mathbf{e}_k = \gamma_k \mathbf{e}_k, \quad N_k \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k$$

であるので、 $(B^T B - \sigma_j^2 I) \mathbf{x}_j = \gamma_k \mathbf{e}_k$ は、

【数 3 1】

40

$$N_k^T \mathbf{x}_j = \mathbf{e}_k$$

となる。この簡単な式を解くことによって特異ベクトルを算出することができる。具体的には、

【数 3 2】

$$x_j(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho = k, \\ -L_\rho x_j(\rho+1), & \rho = k-1, k-2, \dots, 1, \\ -U_{\rho-1} x_j(\rho-1), & \rho = k+1, k+2, \dots, m \end{cases}$$

ただし、 $x_j(\rho)$ は x_j の ρ 番目の要素である。

のようにわずかな演算で特異ベクトルを算出することができる。なお、ある 0 について、 $D_{0+} = 0$ あるいは $D_{0-} = 0$ であったとしても、行列 B の (\quad, \quad) 成分である $b_{2-1}^{(0)}$ と、行列 B の $(\quad, \quad + 1)$ 成分である $b_{2}^{(0)}$ を用いて、

【数 3 3】

$$x_j(\rho_0) = \begin{cases} -\frac{b_{2\rho_0+1}^{(0)} b_{2\rho_0+2}^{(0)}}{b_{2\rho_0-1}^{(0)} b_{2\rho_0}^{(0)}} x_j(\rho_0+2), & \rho_0 < k, \\ -\frac{b_{2\rho_0-5}^{(0)} b_{2\rho_0-4}^{(0)}}{b_{2\rho_0-3}^{(0)} b_{2\rho_0-2}^{(0)}} x_j(\rho_0-2), & \rho_0 > k \end{cases}$$

と特異ベクトルを算出することができる（このように特異ベクトルを算出する処理を例外処理と呼ぶことにする）。なお、残差項のパラメータ k 及び k の値は、

【数 3 4】

$$\gamma_k \equiv q_k^{(+1)} + q_k^{(-1)} - (e_{k-1}^{(0)} + q_k^{(0)} - \sigma_j^2) \quad (\text{式 1 0})$$

の絶対値が最小となるように決定する。したがって、上述のコレスキー分解を求め、ツイスト行列 N_k を求めることができれば、特異ベクトルを求めることになる。そこで、次にコレスキー分解について説明する。

【0 0 9 8】

図 1 4 で示すように、 $B^{(0)T} B^{(0)} - \sigma_j^2 I$ をコレスキー分解することは、 $B^{(0)}$ に対応する $\{q_k^{(0)}, e_k^{(0)}\}$ から、 $B^{(\pm 1)}$ に対応する $\{q_k^{(\pm 1)}, e_k^{(\pm 1)}\}$ を求めることである。

【0 0 9 9】

(q d 型ツイスト分解法)

まず、従来から知られている q d 型ツイスト分解法で用いる q d 型変換について説明する（図 1 4 参照）。

【数 3 5】

$$\text{q d 型変換} : \{q_k^{(0)}, e_k^{(0)}\} \mapsto \{q_k^{(\pm 1)}, e_k^{(\pm 1)}\}$$

【0 1 0 0】

この変換は、さらに stationary q d with shift (stqds) 変換

【数 3 6】

$$\begin{aligned} \text{stqds 変換} : \{q_k^{(0)}, e_k^{(0)}\} &\mapsto \{q_k^{(+1)}, e_k^{(+1)}\} \\ q_k^{(+1)} + e_{k-1}^{(+1)} &= q_k^{(0)} + e_{k-1}^{(0)} - \sigma_j^2, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ q_k^{(+1)} e_k^{(+1)} &= q_k^{(0)} e_k^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ e_0^{(+1)} &\equiv 0, \quad e_0^{(0)} \equiv 0 \end{aligned}$$

及び reverse-time progressive q d with shift (rpqds) 変換

10

20

30

40

【数 3 7】

$$\begin{aligned} \text{r p q d s 変換} : \{q_k^{(0)}, e_k^{(0)}\} &\mapsto \{q_k^{(-1)}, e_k^{(-1)}\} \\ q_k^{(-1)} + e_k^{(-1)} &= q_k^{(0)} + e_{k-1}^{(0)} - \sigma_j^2, \quad k=1,2,\dots,m, \\ q_{k+1}^{(-1)} e_k^{(-1)} &= q_k^{(0)} e_k^{(0)}, \quad k=1,2,\dots,m-1, \\ e_0^{(0)} &\equiv 0, \quad e_m^{(-1)} \equiv 0 \end{aligned}$$

に分けられる。特異値 σ_j が既知であれば反復的な計算が不要なため、計算量を少なく抑えることができるが、常に数値安定性と精度が高い方法ではない。それは、s t q d s 変換、r p q d s 変換は、共に減算による桁落ちが発生する可能性があるからである。例えば、s t q d s 変換において、 $q_k^{(0)} + e_{k-1}^{(0)} - \sigma_j^2 \sim e_{k-1}^{(+1)}$ であれば、 $q_k^{(+1)}$ を求める際に、倍精度計算でもの有効数字がわずか 1 桁になることもある。その場合には、 $q_k^{(0)} e_k^{(0)} / q_k^{(+1)}$ を計算すると誤差が生じる。つまり、 $e_k^{(+1)}$ が精度よく計算できないことになる。また、 $q_{k+1}^{(+1)}$ を求めるのに $e_k^{(+1)}$ が必要であり、 $e_k^{(+1)}$ を求めるのに $q_k^{(+1)}$ が必要であるといったように逐次的な計算が要求されるので、1 箇所発生した桁落ちによる誤差が波及し、さらなる誤差増大の可能性も秘めている。その結果、理論上は $q_k^{(+1)}$

0 であるが、誤差蓄積により $q_k^{(+1)} = 0$ となり、 $q_k^{(0)} e_k^{(0)} / q_k^{(+1)}$ の計算においてオーバーフローが起こるといった数値不安定な状況も想定される。 $B^{(0)} = B$ の成分 $\{b_{2k-1}^{(0)}, b_{2k}^{(0)}\}$ が与えられる、すなわち $\{q_k^{(0)}, e_k^{(0)}\}$ が与えられると、 σ_j^2 及び $e_{k-1}^{(+1)}$ が一意的に決まるので、この状況は避けることはできない。r p q d s 変換も同様の性質を持つため、実用的なレベルにまで達したとはいいがたい。L A P A C K において F O R T R A N ルーチン D S T E G R として改良版が公開されているものの欠点は完全に解決されていない。

【0 1 0 1】

(L V 型ツイスト分解法)

次に、L V 型ツイスト分解法で用いるミウラ変換、d L V v 型変換、逆ミウラ変換について説明する (図 1 4 参照)。

【数 3 8】

$$\begin{aligned} \text{ミウラ変換} : \{q_k^{(0)}, e_k^{(0)}\} &\mapsto \{u_{2k-1}^{(0)}, u_{2k}^{(0)}\} \\ \text{s t d L V v 変換} : u_k^{(0)} &\mapsto u_k^{(+1)} \\ \text{r d L V v 変換} : u_k^{(0)} &\mapsto u_k^{(-1)} \\ \text{逆ミウラ変換} : \{u_{2k-1}^{(+1)}, u_{2k}^{(+1)}\} &\mapsto \{q_k^{(+1)}, e_k^{(+1)}\} \end{aligned}$$

【0 1 0 2】

まず、ミウラ変換について説明する。この変換は、次のように示される。

【数 3 9】

$$\begin{aligned} u_{2k-1}^{(0)} &= \frac{t_k^{(0)}}{\delta^{(0)}}, \quad k=1,2,\dots,m, \\ u_{2k}^{(0)} &= \frac{e_k^{(0)}}{t_k^{(0)}}, \quad k=1,2,\dots,m-1, \\ t_k^{(0)} &\equiv \frac{q_k^{(0)}}{\frac{1}{\delta^{(0)}} + u_{2k-2}^{(0)}} - 1, \end{aligned}$$

$$u_0^{(0)} \equiv 0,$$

ただし、 $\delta^{(0)}$ は任意である。

【0 1 0 3】

次に、d L V v 型変換について説明する。この変換は、さらに stationary discrete Lotka - Volterra with variable step - size (std L V v) 変換

【数 4 0】

$$u_k^{(+1)} = u_k^{(0)} \times \frac{1 + \delta^{(0)} u_{k-1}^{(0)}}{1 + \delta^{(+1)} u_{k-1}^{(+1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2m - 1,$$

$$u_0^{(0)} \equiv 0, \quad u_0^{(+1)} \equiv 0$$

及び reverse - time discrete Lotka - Volterra with variable step - size (rd L V v) 変換

【数 4 1】

$$u_k^{(-1)} = u_k^{(0)} \times \frac{1 + \delta^{(0)} u_{k-1}^{(0)}}{1 + \delta^{(-1)} u_{k+1}^{(-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2m - 1,$$

$$u_0^{(0)} \equiv 0, \quad u_{2m}^{(-1)} \equiv 0$$

に分けられる。ただし、

【数 4 2】

$$\frac{1}{\delta^{(0)}} - \frac{1}{\delta^{(n)}} = \sigma_j^2, \quad (n = +1, -1)$$

を満たす範囲内で (± 1) は任意である。

【0 1 0 4】

最後に、逆ミウラ変換について説明する。この変換は、次のように示される。

【数 4 3】

$$q_k^{(\pm 1)} = \frac{(1 + \delta^{(\pm 1)} u_{2k-2}^{(\pm 1)}) \times (1 + \delta^{(\pm 1)} u_{2k-1}^{(\pm 1)})}{\delta^{(\pm 1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$e_k^{(\pm 1)} = \delta^{(\pm 1)} u_{2k-1}^{(\pm 1)} u_{2k}^{(\pm 1)}, \quad k = 1, 2, \dots, m - 1$$

$$u_0^{(\pm 1)} \equiv 0$$

【0 1 0 5】

このようにして、q d 型変換と同様に、コレスキー分解を行うことができる。q d 型変換では見られない離散 Lotka - Volterra 型変換の大きな特徴は、任意パラメータを持つことである。すなわち、 $j^2 = 1 / (\delta^{(0)} - 1 / (\delta^{(\pm 1)}))$ を満たす範囲で $(\delta^{(n)})$ の値を任意に設定できる。 $(\delta^{(n)})$ を変動させると補助変数 $u_k^{(n)}$ の値も変化するが、桁落ちによる誤差や数値不安定が発生するかどうかは事前に判定できる。この判定は、if 文によって実装されてもよい。この場合は、 $(\delta^{(n)})$ を再設定後に再度計算すればよい。また、 $u_k^{(\pm 1)}$ が求めれば逆ミウラ変換によって $q_k^{(\pm 1)}$ 及び $e_k^{(\pm 1)}$ が独立に計算されるので、誤差が伝播しないという性質を持つ。なお、逆ミウラ変換をミウラ変換、ミウラ変換を逆ミウラ変換と呼んでもよく、std L V v 変換を s t L V v 変換と呼んでもよく、rd L V v 変換を r L V v 変換と呼んでもよい。

【0 1 0 6】

ここで、L V 型ツイスト分解法による処理のより詳細な処理の一例について説明する。図 1 5 ~ 図 2 0 は、L V 型ツイスト分解法による処理の一例を示すフローチャートである。

【0 1 0 7】

図 1 5 は、コレスキー分解の全体の処理の一例を示す図である。

(ステップ S 9 0 1) コレスキー分解部 2 1 は、ミウラ変換を行う。この処理の詳細については後述する。

(ステップ S 9 0 2) コレスキー分解部 2 1 は、 $1 / (\delta^{(\pm 1)})$ を $1 / (\delta^{(0)} - j^2)$ とする。

10

20

30

40

50

【0108】

(ステップS903) コレスキー分解部21は、後述するProcedure1の処理を実行する。

(ステップS904) コレスキー分解部21は、後述するProcedure2の処理を実行する。

【0109】

(ステップS905) コレスキー分解部21は、 $q_k^{(+1)}$ 、 $e_k^{(+1)}$ がすでに算出されているかどうか判断する。そして、すでに算出されている場合には、コレスキー分解の一連の処理は終了となり、一方、算出されていない場合には、ステップS901に戻る。

10

【0110】

図16は、図15のフローチャートにおけるステップS903の処理の詳細を示すフローチャートである。

(ステップS1001) コレスキー分解部21は、 $q_k^{(+1)}$ 、 $e_k^{(+1)}$ がすでに算出されているかどうか判断する。そして、すでに算出されている場合には、終了となり、算出されていない場合には、ステップS1002に進む。

(ステップS1002) コレスキー分解部21は、stdLVv変換等の処理を行う。この処理の詳細については後述する。

【0111】

図17は、図15のフローチャートにおけるステップS904の処理の詳細を示すフローチャートである。

20

(ステップS1101) コレスキー分解部21は、 $q_k^{(-1)}$ 、 $e_k^{(-1)}$ がすでに算出されているかどうか判断する。そして、すでに算出されている場合には、終了となり、算出されていない場合には、ステップS1102に進む。

(ステップS1102) コレスキー分解部21は、rdLVv変換等の処理を行う。この処理の詳細については後述する。

【0112】

図18は、図15のフローチャートのステップS901の処理の詳細を示すフローチャートである。

(ステップS1201) コレスキー分解部21は、 $1/\lambda^{(0)}$ の値を決定する。この値は、前述のように任意に決定することができる。算出された特異値の小さい順に $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ とする場合に、例えば、コレスキー分解部21は、 $1/\lambda^{(0)}$ の値を λ_1^2 よりも小さい値(例えば、「1」など)に設定し、その後、ステップS1203等で桁落ちの発生する可能性がある判断された場合に、 $1/\lambda^{(0)}$ の値を λ_j^2 と λ_{j+1}^2 の間($j=1, 2, \dots$)に設定する、というように、 j を1ずつ大きくしながら $1/\lambda^{(0)}$ の値を設定していてもよい。なお、 $1/\lambda^{(0)}$ の値を決定する方法は、これに限定されないことは言うまでもない。

30

(ステップS1202) コレスキー分解部21は、 λ_1 を $q_1^{(0)} - 1/\lambda^{(0)}$ に設定する。

【0113】

(ステップS1203) コレスキー分解部21は、 λ_1 の絶対値が λ_2 よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップS1204に進み、そうでない場合には、ステップS1201に戻って、 $1/\lambda^{(0)}$ の値を決定する処理を再度実行する。なお、この λ_1 も任意に定めることができる。例えば、 λ_1 としてマシン・イプシロンを用いてもよい。 λ_1 の値を大きくすると精度が向上し、 λ_1 の値を小さくすると精度が低下する。なお、このステップS1203で行っている処理は、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 λ_1 の絶対値が λ_2 よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性がある判断されることになる。

40

【0114】

(ステップS1204) コレスキー分解部21は、 λ_2 を $q_1^{(0)} / (1 + \lambda_1^{(0)})$

50

$u_0^{(0)}$ に設定する。なお、前述のように $u_0^{(0)} = 0$ であるため、 2 は $q_1^{(0)}$ に設定されたことになる。

【0115】

(ステップS1205) コレスキー分解部21は、 $u_1^{(0)} (1 + u_0^{(0)})$ を 1 に設定する。ここで、 1 は、ステップS1202において $q_1^{(0)} - 1 / u_0^{(0)}$ に設定されているが、前述のように $u_0^{(0)} = 0$ であるため、 1 は、 $q_1^{(0)} / (1 + u_0^{(0)} - 1 / u_0^{(0)})$ と等しく、これにミウラ変換を行うと $u_1^{(0)} = u_{2k-1}^{(0)} |_{k=1}$ となるからである。なお、 $u_0^{(0)} = 0$ から $(1 + u_0^{(0)}) = 1$ である。

【0116】

(ステップS1206) コレスキー分解部21は、カウンタ k を「1」に設定する。

(ステップS1207) コレスキー分解部21は、 1 を $e_k^{(0)} / 1$ に設定する。前述のように、 1 は $u_{2k-1}^{(0)}$ となるから、 $e_k^{(0)} / 1$ にミウラ変換を行うと、 1 は $u_{2k}^{(0)}$ と等しいことになる。

【0117】

(ステップS1208) コレスキー分解部21は、 2 を $1 + 1$ に設定する。ステップS1207の説明からわかるように、 2 は $1 + u_{2k}^{(0)}$ と等しいことになる。

【0118】

(ステップS1209) コレスキー分解部21は、 2 の絶対値が よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップS1210に進み、そうでない場合には、ステップS1201に戻って、 $1 / u_{2k}^{(0)}$ の値を決定する処理を再度実行する。なお、このステップS1209で行っている処理は、ステップS1203の処理と同様に、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 2 の絶対値が よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性があるとして判断されることになる。

【0119】

(ステップS1210) コレスキー分解部21は、 1×2 を算出して $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)})$ に設定する。前述のように、 1 は $u_{2k}^{(0)}$ と等しく、 2 は $q_k^{(0)} / (1 + u_{2k-2}^{(0)})$ であるため、 1×2 にミウラ変換を実行すると、 $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)})$ に等しくなるからである。

【0120】

(ステップS1211) コレスキー分解部21は、 2 を $q_{k+1}^{(0)} / 2$ に設定する。前述のように、 2 は $1 + u_{2k}^{(0)}$ と等しいため、 2 は、 $q_{k+1}^{(0)} / (1 + u_{2k}^{(0)})$ となり、 2 における k の値を1だけインクリメントしたことになる。

【0121】

(ステップS1212) コレスキー分解部21は、 1 を $2 - 1 / u_{2k}^{(0)}$ に設定する。前述のように、 2 は $q_{k+1}^{(0)} / (1 + u_{2k}^{(0)})$ と等しいため、 1 は、 $q_{k+1}^{(0)} / (1 + u_{2k}^{(0)}) - 1 / u_{2k}^{(0)}$ となり、ミウラ変換を実行すると、 1 は、 $u_{2k+1}^{(0)}$ となる。したがって、 1 における k の値を1だけインクリメントしたことになる。

【0122】

(ステップS1213) コレスキー分解部21は、 1 の絶対値が よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップS1214に進み、そうでない場合には、ステップS1201に戻って、 $1 / u_{2k}^{(0)}$ の値を決定する処理を再度実行する。なお、このステップS1213で行っている処理は、ステップS1203の処理と同様に、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 1 の絶対値が よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性があるとして判断されることになる。

【0123】

10

20

30

40

50

(ステップ S 1 2 1 4) コレスキー分解部 2 1 は、 2×1 を算出して $u_{2k+1}^{(0)} (1 + u_{2k}^{(0)})$ に設定する。前述のように、 2 は $1 + u_{2k}^{(0)}$ と等しく、 1 は、 $u_{2k+1}^{(0)}$ に等しいからである。

【0124】

(ステップ S 1 2 1 5) コレスキー分解部 2 1 は、カウンタ k を 1 だけインクリメントする。

(ステップ S 1 2 1 6) コレスキー分解部 2 1 は、カウンタ k が m に等しいかどうか判断する。そして、 m に等しい場合には、一連の処理は終了となり、そうでない場合には、ステップ S 1 2 0 7 に戻る。

【0125】

このようにして、 $u_{2k+1}^{(0)} (1 + u_{2k}^{(0)})$ と、 $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)})$ とが算出されることになる。これらの値は、コレスキー分解部 2 1 が有する図示しないメモリ等において一時的に記憶されてもよい。

【0126】

図 1 9 は、図 1 6 のフローチャートのステップ S 1 0 0 2 の処理の詳細を示すフローチャートである。

(ステップ S 1 3 0 1) コレスキー分解部 2 1 は、 2 を $1 + u_0^{(+1)}$ に設定する。なお、前述のように $u_0^{(+1)} = 0$ であるため、 2 は 1 に設定されたことになる。

【0127】

(ステップ S 1 3 0 2) コレスキー分解部 2 1 は、 1 を $u_1^{(0)} (1 + u_0^{(0)}) / (1 + u_0^{(+1)})$ に設定する。ここで、 $u_1^{(0)} (1 + u_0^{(0)})$ の値としては、ステップ S 1 2 0 5 で算出したものを用いる。なお、前述のように $u_0^{(+1)} = 0$ である。また、この 1 の式に $stdLV$ 変換を実行すると、 1 は、 $u_1^{(+1)}$ に設定されたことになる。

【0128】

(ステップ S 1 3 0 3) コレスキー分解部 2 1 は、カウンタ k を「1」に設定する。

(ステップ S 1 3 0 4) コレスキー分解部 2 1 は、 1 を $1 + 1 / u_1^{(+1)}$ に設定する。

【0129】

(ステップ S 1 3 0 5) コレスキー分解部 2 1 は、 1 の絶対値が よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップ S 1 3 0 6 に進み、そうでない場合には、図 1 5 のフローチャートの Procedure 2 (ステップ S 9 0 4) に進む。なお、このステップ S 1 3 0 5 で行っている処理は、ステップ S 1 2 0 3 の処理と同様に、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 1 の絶対値が よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性があるとして判断されることになる。

【0130】

(ステップ S 1 3 0 6) コレスキー分解部 2 1 は、 2 を $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)}) / 1$ に設定する。ここで、 $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)})$ の値としては、ステップ S 1 2 1 0 で算出したものを用いる。また、この 2 の式に $stdLV$ 変換を実行すると、 2 は、 $u_{2k}^{(+1)}$ に設定されたことになる。

【0131】

(ステップ S 1 3 0 7) コレスキー分解部 2 1 は、 1×2 を算出する。前述のように、 1 は $1 + 1 / u_1^{(+1)} = u_{2k-1}^{(+1)} + 1 / u_1^{(+1)}$ に等しく、 2 は $1 + u_{2k-2}^{(+1)}$ に等しいため、 1×2 に逆ミウラ変換を実行すると $q_k^{(+1)}$ に等しくなる。したがって、コレスキー分解部 2 1 は、 1×2 を算出して $q_k^{(+1)}$ に設定する。

【0132】

(ステップ S 1 3 0 8) コレスキー分解部 2 1 は、 2 を $1 + 2$ に設定する。前述の

10

20

30

40

50

ように、 $u_{2k}^{(+1)}$ は $u_{2k}^{(+1)}$ と等しいため、 $u_{2k}^{(+1)}$ は $1 + u_{2k}^{(+1)}$ となる。したがって、 $u_{2k}^{(+1)}$ における k の値を 1 だけインクリメントしたことになる。

【0133】

(ステップ S1309) コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k}^{(+1)}$ の絶対値が $u_{2k}^{(+1)}$ よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップ S1310 に進み、そうでない場合には、図 15 のフローチャートの Procedure 2 (ステップ S904) に進む。なお、このステップ S1309 で行っている処理は、ステップ S1203 の処理と同様に、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 $u_{2k}^{(+1)}$ の絶対値が $u_{2k}^{(+1)}$ よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性があるとして判断されることになる。

10

【0134】

(ステップ S1310) コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k}^{(+1)}$ を算出する。前述のように、 $u_{2k}^{(+1)}$ は $u_{2k-1}^{(+1)}$ に等しく、 $u_{2k}^{(+1)}$ は $u_{2k}^{(+1)}$ と等しいため、 $u_{2k}^{(+1)}$ に逆ミウラ変換を実行すると、 $e_k^{(+1)}$ に等しくなる。したがって、コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k}^{(+1)}$ を算出して $e_k^{(+1)}$ に設定する。

【0135】

(ステップ S1311) コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k+1}^{(0)}$ を $(1 + u_{2k}^{(0)}) / u_{2k+1}^{(0)}$ に設定する。ここで、 $u_{2k+1}^{(0)}$ の値としては、ステップ S1214 で算出したものを用いる。また、この $u_{2k+1}^{(0)}$ の式に $stdLvv$ 変換を実行すると、 $u_{2k+1}^{(+1)}$ は、 $u_{2k+1}^{(+1)}$ に設定されたことになる。したがって、 $u_{2k+1}^{(+1)}$ における k の値を 1 だけインクリメントしたことになる。

20

【0136】

(ステップ S1312) コレスキー分解部 21 は、カウンタ k を 1 だけインクリメントする。

(ステップ S1313) コレスキー分解部 21 は、カウンタ k が m に等しいかどうか判断する。そして、 m に等しい場合には、ステップ S1314 に進み、そうでない場合には、ステップ S1304 に戻る。

【0137】

(ステップ S1314) コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k}^{(+1)}$ を $(1 + 1 / u_{2k}^{(+1)})$ を算出する。これは、ステップ S1304 で $u_{2k}^{(+1)}$ を更新した後に、ステップ S1307 で $u_{2k}^{(+1)}$ を計算することと等しい。したがって、コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k}^{(+1)}$ を算出して $q_1^{(+1)}$ に設定する。このようにして、ミウラ変換された結果に $stdLvv$ 変換と、逆ミウラ変換とを実行して、 $q_k^{(+1)}$ 、 $e_k^{(+1)}$ を算出する処理が終了する。これらの値は、コレスキー分解部 21 が有する図示しないメモリ等において一時的に記憶されてもよい。

30

【0138】

図 20 は、図 17 のフローチャートのステップ S1102 の処理の詳細を示すフローチャートである。

(ステップ S1401) コレスキー分解部 21 は、 $u_{2m-1}^{(0)}$ を $(1 + u_{2m-2}^{(0)}) / u_{2m-1}^{(0)}$ に設定する。ここで、 $u_{2m-1}^{(0)}$ の値としては、ステップ S1214 で算出したものを用いる。なお、前述のように $u_{2m}^{(-1)} = 0$ である。また、この $u_{2m-1}^{(0)}$ の式に $rdLvv$ 変換を実行すると、 $u_{2m-1}^{(-1)}$ は、 $u_{2m-1}^{(-1)}$ に設定されたことになる。

40

【0139】

(ステップ S1402) コレスキー分解部 21 は、カウンタ k を「 $m - 1$ 」に設定する。

(ステップ S1403) コレスキー分解部 21 は、 $u_{2k}^{(-1)}$ を $(1 + 1 / u_{2k}^{(-1)})$ に設定する。

【0140】

50

(ステップ S 1 4 0 4) コレスキー分解部 2 1 は、 1 の絶対値が よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップ S 1 4 0 5 に進み、そうでない場合には、図 1 5 のフローチャートのミウラ変換 (ステップ S 9 0 1) に戻る。なお、このステップ S 1 4 0 4 で行っている処理は、ステップ S 1 2 0 3 の処理と同様に、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 1 の絶対値が よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性があるとは判断されることになる。

【 0 1 4 1 】

(ステップ S 1 4 0 5) コレスキー分解部 2 1 は、 2 を $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)}) / 1$ に設定する。ここで、 $u_{2k}^{(0)} (1 + u_{2k-1}^{(0)})$ の値としては、ステップ S 1 2 1 0 で算出したものを用いる。また、この 2 の式に $r d L V v$ 変換を実行すると、 2 は、 $(-1) u_{2k}^{(-1)}$ に設定されたことになる。

10

【 0 1 4 2 】

(ステップ S 1 4 0 6) コレスキー分解部 2 1 は、 2 を $1 + 2$ に設定する。前述のように、 2 は $(-1) u_{2k}^{(-1)}$ と等しいため、 2 は $1 + (-1) u_{2k}^{(-1)}$ となる。

【 0 1 4 3 】

(ステップ S 1 4 0 7) コレスキー分解部 2 1 は、 2 の絶対値が よりも大きいかどうか判断する。そして、大きい場合には、ステップ S 1 4 0 8 に進み、そうでない場合には、図 1 5 のフローチャートのミウラ変換 (ステップ S 9 0 1) に戻る。なお、このステップ S 1 4 0 7 で行っている処理は、ステップ S 1 2 0 3 の処理と同様に、桁落ちが発生する可能性について判断する処理である。 2 の絶対値が よりも大きくない場合には、桁落ちの発生する可能性があるとは判断されることになる。

20

【 0 1 4 4 】

(ステップ S 1 4 0 8) コレスキー分解部 2 1 は、 1×2 を算出する。前述のように、 1 は $1 + 1 / (-1) = u_{2k+1}^{(-1)} + 1 / (-1)$ に等しく、 2 は $1 + (-1) u_{2k}^{(-1)}$ に等しいため、 1×2 に逆ミウラ変換を実行すると $q_{k+1}^{(-1)}$ に等しくなる。したがって、コレスキー分解部 2 1 は、 1×2 を算出して $q_{k+1}^{(-1)}$ に設定する。

【 0 1 4 5 】

(ステップ S 1 4 0 9) コレスキー分解部 2 1 は、 1 を $u_{2k-1}^{(0)} (1 + u_{2k-2}^{(0)}) / 2$ に設定する。ここで、 $u_{2k-1}^{(0)} (1 + u_{2k-2}^{(0)})$ の値としては、ステップ S 1 2 0 5, S 1 2 1 4 で算出したものを用いる。また、この 1 の式に $s t d L V v$ 変換を実行すると、 1 は、 $u_{2k-1}^{(-1)}$ に設定されたことになる。したがって、 1 における k の値を 1 だけデクリメントしたことになる。

30

【 0 1 4 6 】

(ステップ S 1 4 1 0) コレスキー分解部 2 1 は、 1×2 を算出する。前述のように、 1 は $u_{2k-1}^{(-1)}$ に等しく、 2 は $(-1) u_{2k}^{(-1)}$ と等しいため、 1×2 に逆ミウラ変換を実行すると、 $e_k^{(-1)}$ に等しくなる。したがって、コレスキー分解部 2 1 は、 1×2 を算出して $e_k^{(-1)}$ に設定する。

40

【 0 1 4 7 】

(ステップ S 1 4 1 1) コレスキー分解部 2 1 は、カウンタ k を 1 だけデクリメントする。

(ステップ S 1 4 1 2) コレスキー分解部 2 1 は、カウンタ k が 0 に等しいかどうか判断する。そして、0 に等しい場合には、ステップ S 1 4 1 3 に進み、そうでない場合には、ステップ S 1 4 0 3 に戻る。

【 0 1 4 8 】

(ステップ S 1 4 1 3) コレスキー分解部 2 1 は、 $1 + 1 / (-1)$ を算出する。これは、ステップ S 1 4 0 3 で 1 を更新した後に、ステップ S 1 4 0 8 で 1×2 を

50

計算することと等しい。この場合、 2 は 1 だからである。したがって、コレスキー分解部 $2-1$ は、 $1 + 1 / (\cdot^{-1})$ を算出して $q_1 (\cdot^{-1})$ に設定する。このようにして、ミウラ変換された結果に $r d L V v$ 変換と、逆ミウラ変換とを実行して、 $q_k (\cdot^{-1})$ 、 $e_k (\cdot^{-1})$ を算出する処理が終了する。これらの値は、コレスキー分解部 $2-1$ が有する図示しないメモリ等において一時的に記憶されてもよい。

【0149】

なお、図15のフローチャートの処理によって算出することができるのは1個の特異値に対応する特異ベクトルであるため、全ての特異値に対応する特異ベクトルを算出する場合には、コレスキー分解部 $2-1$ は、図15のフローチャートの処理を特異値の数だけ繰り返すことになる。

10

【0150】

メモリ消費を抑えるために、補助変数 $u_k (\cdot^n)$ のための配列は必ずしも用意する必要はない。一方、 $1 + (\cdot^0) u (\cdot^0)$ のためのメモリ領域を確保し、ミウラ変換、 $d L V v$ 型変換、逆ミウラ変換のステップにまたがってこの値を利用することで、メモリ消費を抑え、計算量を低減することができる。これにより、誤差も低減される。

【0151】

ここで、誤差について説明する。人間が理想的な状況、すなわち、無限桁の計算をいくらでもできるとすると、 $q d$ 型ツイスト分解法であっても、 $L V$ 型ツイスト分解法であっても問題ない。しかしながら、コンピュータで計算を行う場合は注意が必要である。有限桁の計算しか行えないコンピュータ上では、数学的に正しい計算法を使っても必ずしも正しい結果が得られる訳ではない。そればかりか、いつまでたっても計算が終了しないといった思わぬ数値的な問題が発生する場合もある。

20

【0152】

コンピュータ計算による誤差には、丸め誤差及び桁落ちによる誤差などが知られている。丸め誤差単独では、高々有効桁の最後の桁が真値と比べて異なる程度で大きな誤差にはならない。また、指数部が異なる2つの実数の加算、乗算、除算の少なくとも1つの演算を行えばやはり丸め誤差が生じるが、それ以上の誤差は発生しない。さらに、このような丸め誤差を発生するような操作が繰り返されても、丸めモードが $n e a r$ (四捨五入) ならば、一方的に切り上げられたり、あるいは切り捨てられたりして誤差が極端に蓄積することは少ない。よって、多くの数値計算法は加算、乗算、除算の少なくとも1つの演算によって発生する丸め誤差を特別注意することは少なく、 $d L V s$ ルーチンによる特異値計算でも結果的に丸め誤差は一様に増大しない。

30

【0153】

問題となるのは、同符号の実数の減算及び異符号の実数の加算により生じる、桁落ちである。桁落ちによる誤差で値が0となった後、その値による除算を行うと、0が分母にくるような不定形となり計算不可能となる。こうなるといつまでたっても計算が終了しない。減算 除算と計算する部分が $q d$ 型ツイスト分解法、 $L V$ 型ツイスト分解法の両方に存在するので、桁落ち誤差には十分に注意する必要がある。

【0154】

$L V$ 型ツイスト分解法では、上述の桁落ちによる誤差を含んでいるかどうかは減算によって得られた値が小さいかどうかで判断できる。 $q d$ 型ツイスト分解法の場合、桁落ち誤差を含むことが分かったとしても、それを回避することはできない。なぜならば、初期値として $\{q_k (\cdot^0), e_k (\cdot^0)\}$ が与えられると、 j は一意的に決定され、 $\{q_k (\cdot^{\pm 1}), e_k (\cdot^{\pm 1})\}$ も一意的に導出されるためである。すなわち、任意パラメータを持たない自由度のない計算法であるためである。

40

【0155】

それに対して、 $L V$ 型ツイスト分解法は、自由に設定できるパラメータ (\cdot^0) を持つため、補助変数 $u_k (\cdot^n)$ の値を様々に変化させることができる(図21A、図21B参照)。すなわち、様々な経路で $\{q_k (\cdot^{\pm 1}), e_k (\cdot^{\pm 1})\}$ を計算することができる。よって、桁落ちが発生する場合も回避できる。図18~図20の条件判定によって桁落

50

ちの影響をチェックし、減算によって得られた値の絶対値が小さな数より大きいという条件が満たされなければ、パラメータ (ϵ) の設定に戻るといものである。この処理は、条件が満たされるまで繰り返される。なお、精度よりも高速性を重視する場合は、数回条件が満たさなければ $(q_k^{(+1)} = 0$ あるいは $q_k^{(-1)} = 0$ ならば)、例外処理を行ってもよい。

【0156】

q d 型ツイスト分解法あるいは L V 型ツイスト分解法によってコレスキー分解をすることができると、上述のようにツイストされた行列 N_k を算出することができ、その行列 N_k の $N_k^T x_j = e_k$ を解くことによって、 x_j を算出することができる。ここで、

【数44】

$$x_j \leftarrow \frac{x_j}{\|x_j\|}$$

と x_j を置き換えることにより、この x_j を正規化する。このようにして、右特異ベクトル x_j を求めることができる。この右特異ベクトル x_j を用いて、 $V_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ とすることにより、右直交行列 V_B を算出することができる。

【0157】

また、前述のように、

【数45】

$$U_B = BV_B \Sigma^{-1}$$

となるため、 V_B が求めれば、2重対角行列 B 、特異値を対角成分に有する行列は既知であるため、左直交行列を算出することができる。より具体的には、特異値 σ_j が 0 でない場合には、

【数46】

$$y_j = \frac{Bx_j}{\sigma_j}$$

となる。一方、特異値 σ_j が 0 である場合には、

【数47】

$$B^T y_j = 0$$

を解くことにより、 y_j を算出することができる。ここで、 x_j の場合と同様に、

【数48】

$$y_j \leftarrow \frac{y_j}{\|y_j\|}$$

と y_j を置き換えることにより、この y_j を正規化する。このようにして、左特異ベクトル y_j を求めることができる。この左特異ベクトル y_j を用いて、 $U_B = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ とすることにより、左直交行列 U_B を算出することができる。このようにして、2重対角行列 B の特異値分解がなされる。なお、この処理の後に、逆反復法や、グラムシュミット法の処理を行ってもよいことは前述の通りである。また、ここでは右直交行列 V_B を先に算出する場合について説明したが、 $B B^T$ の固有ベクトル、すなわち左直交行列 U_B を先に算出してもよい。

【0158】

また、2重対角行列 B の特異値分解を行うことができれば、次のように、行列 A の特異値分解も行われる。

10

20

30

40

【数 4 9】

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{cases} U_H (B \ 0) V_H^T & (l_1 \leq l_2) \\ U_H \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} V_H^T & (l_1 \geq l_2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} U_H (U_B \Sigma V_B^T \ 0) V_H^T & (l_1 \leq l_2) \\ U_H \begin{pmatrix} U_B \Sigma V_B^T \\ 0 \end{pmatrix} V_H^T & (l_1 \geq l_2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} U_H U_B (\Sigma \ 0) \begin{pmatrix} V_B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T V_H^T & (l_1 \leq l_2) \\ U_H \begin{pmatrix} U_B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix} V_B^T V_H^T & (l_1 \geq l_2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} U_A (\Sigma \ 0) V_A^T & (l_1 \leq l_2) \\ U_A \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix} V_A^T & (l_1 \geq l_2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

10

【0 1 5 9】

20

特異ベクトル算出部 1 9 は、上述のようにして、特異値記憶部 1 8 が記憶している上 2 重対角行列 B の特異値と、対角行列記憶部 1 3 が記憶している上 2 重対角行列 B とを用いて、上 2 重対角行列 B の特異ベクトルを算出する。まず、コレスキー分解部 2 1 は、対角行列記憶部 1 3 から上 2 重対角行列 B を読み出し、特異値記憶部 1 8 から上 2 重対角行列 B の特異値を読み出す。そして、コレスキー分解部 2 1 は、図 2 2 のフローチャートで示されるように各変換を行い、コレスキー分解の処理を行う。ここでは、L V 型ツイスト分解法を用いる場合について説明する。

【0 1 6 0】

コレスキー分解部 2 1 は、まず、上 2 重対角行列 B の各要素の値から、 $q_k^{(0)}$ 、 $e_k^{(0)}$ を求める。そして、コレスキー分解部 2 1 は、ミウラ変換を実行することにより、 $u_1^{(0)}$ 、 $u_2^{(0)}$ 等を順次求めていく (ステップ S 8 0 1)。

30

【0 1 6 1】

次に、コレスキー分解部 2 1 は、ミウラ変換で得られた $u_k^{(0)}$ を用いて、std L V v 変換を実行することにより、 $u_1^{(+1)}$ 等を順次求めていく (ステップ S 8 0 2)。また、コレスキー分解部 2 1 は、ミウラ変換で得られた $u_k^{(0)}$ を用いて、rd L V v 変換を実行することにより、 $u_{2m-1}^{(-1)}$ 等を順次求めていく (ステップ S 8 0 3)。

【0 1 6 2】

最後に、コレスキー分解部 2 1 は、std L V v 変換で得られた $u_k^{(+1)}$ 及び rd L V v 変換で得られた $u_k^{(-1)}$ を用いて、逆ミウラ変換を実行することにより、 $q_1^{(\pm 1)}$ 、 $e_1^{(\pm 1)}$ 等を順次求めていく (ステップ S 8 0 4)。 $q_k^{(\pm 1)}$ 及び $e_k^{(\pm 1)}$ が求まると、すなわち、上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ と、下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ が求まると、コレスキー分解部 2 1 は、それらを第 1 特異ベクトル算出部 2 2 に渡す。なお、コレスキー分解部 2 1 は、各特異値について、それぞれコレスキー分解を行うものとする。

40

【0 1 6 3】

なお、ここでは、説明の便宜上、図 2 2 のフローチャートを用いてコレスキー分解の処理を説明したが、図 1 5 ~ 図 2 0 のフローチャートで示されるように処理を行ってもよいことは言うまでもない。

【0 1 6 4】

50

第1特異ベクトル算出部22は、特異値記憶部18から特異値を読み出し、式10を用いて k の値を決定する。第1特異ベクトル参集部22は、その k の値を用いて、 q_k ($\neq 1$) 及び e_k ($\neq 1$) からツイスト行列 N_k を求め、 $N_k^T x_j = e_k$ を解くことによって、 x_j を算出する (ステップS302)。

【0165】

次に、第1特異ベクトル算出部22は、算出した x_j を正規化して、右特異ベクトル x_j を求めて特異ベクトル記憶部20に蓄積する (ステップS303)。そして、第1特異ベクトル算出部22は、算出した右特異ベクトル x_j を第2特異ベクトル算出部23に渡す。なお、第1特異ベクトル算出部22は、各特異値について、 x_j を算出する処理と、正規化する処理とを行うことによって、全ての右特異ベクトルを算出することができる。

10

【0166】

第2特異ベクトル算出部23は、上2重対角行列 B を対角行列記憶部13から読み出し、その上2重対角行列 B の特異値を特異値記憶部18から読み出す。そして、第2特異ベクトル算出部23は、第1特異ベクトル算出部22から受け取った右特異ベクトル x_j と、上2重対角行列 B と、特異値とを用いて、 $y_j = B x_j / \lambda_j$ 、あるいは、 $B^T y_j = 0$ を解くことによって、 y_j を算出する (ステップS304)。次に、第2特異ベクトル算出部23は、右特異ベクトル x_j の場合と同様に、算出した y_j を正規化して、左特異ベクトル y_j を求めて特異ベクトル記憶部20に蓄積する (ステップS305)。このようにして、特異ベクトルの算出が終了する。なお、第2特異ベクトル算出部23は、各特異値について、 y_j を算出する処理と、正規化する処理とを行うことによって、全ての左

20

この後、行列記憶部11が記憶している行列 A の特異ベクトルを算出してもよい。その算出の方法は、前述の通りである。

【0167】

また、特異値算出部17が算出した特異値、特異ベクトル算出部19が算出した特異ベクトルを出力する図示しない出力部を特異値分解装置1が備えてもよい。ここで、図示しない出力部による出力は、例えば、特異値等の表示デバイス (例えば、CRTや液晶ディスプレイなど) への表示でもよく、特異値等の所定の機器への通信回線を介した送信でもよく、特異値等のプリンタによる印刷でもよく、特異値等の記録媒体への蓄積でもよい。なお、その出力部は、出力を行うデバイス (例えば、表示デバイスやプリンタなど) を含

30

【0168】

なお、ここでは、コレスキー分解部21がLV型ツイスト分解法によってコレスキー分解を行う場合について説明したが、コレスキー分解部21は、qd型ツイスト分解法によってコレスキー分解を行ってもよい。例えば、コレスキー分解部21は、算出された特異値の分布を見て、分布が密でない場合には、qd型ツイスト分解法を用いるようにしてもよい。

【0169】

また、上記説明では、行列 B が上2重対角行列である場合について説明したが、行列 B は下2重対角行列であっても、その行列 B を上2重対角行列に変換することによって特異値分解を同様に実行することができる。例えば、行列 C が下2重対角行列であるとすると、上2重対角行列 $B = C^T$ とすることができる。その上2重対角行列 B を、

40

$$B = U V^T$$

と特異値分解できたとすると、

$$C = B^T = (U V^T)^T = V U^T$$

となる。したがって、下2重対角行列の特異値分解において、特異値は上2重対角行列 B の特異値と同じであり、特異ベクトルは、左右が逆になることがわかる。

【0170】

50

一方、下2重対角行列Cについても、行列分割部14等が下2重対角行列Cの分割を行い、その分割された下2重対角行列について特異値分解部15が特異値分解を行い、その特異値分解の結果を用いて特異値算出部17が下2重対角行列Cの特異値を算出するようにしてもよい。また、特異ベクトル算出部19において、下2重対角行列Cと、その特異値とを用いてコレスキー分解を行い、その特異値に対応する各特異ベクトルを算出するようにしてもよい。

【0171】

また、上記説明では、特異値算出部17が全ての特異値を算出する場合について説明したが、一部の特異値のみを算出するようにしてもよい。例えば、図13において、特異値算出部17は、行列 B_1 、 B_2 までは、全ての特異値を算出する必要があるが、行列 B_1 、 B_2 から上2重対角行列Bの特異値を算出する際に、必要な範囲で特異値を算出してもよい。したがって、特異値算出部17は、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異値を算出するものであってもよい。その場合には、不必要な特異値を算出することに伴う余分な処理を実行しなくてよいため、処理負荷を軽減することができる。このように、一部の特異値のみを算出する場合には、例えば、上2重対角行列Bの特異値を算出する処理に費やす計算時間を約 $(1 + k/m)/2$ 倍にすることができる。ここで、 m は行列サイズであり、 k は求める特異値の個数である。

10

【0172】

また、上記説明では、特異ベクトル算出部19が算出された特異値に対応する全ての特異ベクトルを算出する場合について説明したが、上記説明から明らかなように、特異ベクトルを算出する処理は、特異値ごとに行うことができる。したがって、特異ベクトル算出部19は、2重対角行列Bの少なくとも1個の特異ベクトルを算出するものであってもよい。このように、特異ベクトル算出部19は、必要な範囲で特異ベクトルを算出ことができ、不必要な特異ベクトルを算出することに伴う余分な処理を実行しなくてよいため、処理負荷を軽減することができる。

20

【0173】

次に、本実施の形態による特異値分解装置1における並列処理について説明する。

本実施の形態による特異値分解装置1では、特異値の計算及び特異ベクトルの計算において、並列的に処理を実行することができる。例えば、図23で示されるように、特異値分解装置1において、特異値分解部15、特異値算出部17、コレスキー分解部21、第1特異ベクトル算出部22、第2特異ベクトル算出部23において、それぞれ並列処理を行ってもよい。

30

【0174】

特異値分解部15は、複数の特異値分解手段15a、15bを備え、その複数の特異値分解手段15a、15bが、分割後の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を並列実行してもよい。例えば、図13において、特異値分解手段15aが行列 B_{11} 、 B_{112} 、 B_{121} 、 B_{121} の特異値分解を実行し、特異値分解手段15bが行列 B_{211} 、 B_{212} 、 B_{221} 、 B_{222} の特異値分解を実行してもよい。

【0175】

特異値算出部17は、複数の特異値算出手段17a、17bを備え、その複数の特異値算出手段17a、17bが、分割元の2重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を並列実行してもよい。例えば、図13において、特異値算出手段17aが行列 B_{11} 、 B_{12} 、 B_1 の特異値等を算出する処理を実行し、特異値算出手段17bが行列 B_{21} 、 B_{22} 、 B_2 の特異値等を算出する処理を実行してもよい。

40

【0176】

コレスキー分解部21は、複数のコレスキー分解手段21a、21bを備え、その複数のコレスキー分解手段21a、21bが、2重対角行列Bをコレスキー分解する処理を並列実行してもよい。例えば、コレスキー分解手段21aが半分の特異値についてコレスキー分解する処理を実行し、コレスキー分解手段21bが残りの半分の特異値についてコレスキー分解する処理を実行してもよい。

50

【 0 1 7 7 】

第 1 特異ベクトル算出部 2 2 は、複数の第 1 特異ベクトル算出手段 2 2 a、2 2 b を備え、その複数の第 1 特異ベクトル算出手段 2 2 a、2 2 b が、特異ベクトルを算出する処理を並列実行してもよい。例えば、第 1 特異ベクトル算出手段 2 2 a がコレスキー分解手段 2 1 a によってコレスキー分解された特異値に関して特異ベクトルを算出する処理を実行し、第 1 特異ベクトル算出手段 2 2 b がコレスキー分解手段 2 1 b によってコレスキー分解された特異値に関して特異ベクトルを算出する処理を実行してもよい。

【 0 1 7 8 】

第 2 特異ベクトル算出部 2 3 は、複数の第 2 特異ベクトル算出手段 2 3 a、2 3 b を備え、その複数の第 2 特異ベクトル算出手段 2 3 a、2 3 b が、特異ベクトルを算出する処理を並列実行してもよい。例えば、第 2 特異ベクトル算出手段 2 3 a が第 1 特異ベクトル算出手段 2 2 a によって算出された特異ベクトルに対応する特異ベクトルを算出する処理を実行し、第 2 特異ベクトル算出手段 2 3 b が第 1 特異ベクトル算出手段 2 2 b によって算出された特異ベクトルに対応する特異ベクトルを算出する処理を実行してもよい。

10

【 0 1 7 9 】

なお、特異値算出部 1 7 の複数の特異値算出手段 1 7 a、1 7 b は、図 1 0 で示される分割された 2 個の行列 B_1 、 B_2 の特異値と行列要素とから、分割元の行列 B_0 の特異値と行列要素とを算出する処理を、並列実行してもよい。以下、その処理について説明する。

【 0 1 8 0 】

まず、式 2 から、各特異値を求める処理については、並列実行可能なことがわかる。ここで、式 5 を次のように書き換えることにする。

20

【 数 5 0 】

$$|\hat{z}_i| = \sqrt{(\hat{\sigma}_i^2 - d_i^2) \prod_{k=1}^{i-1} \frac{(\hat{\sigma}_k^2 - d_i^2)}{(d_k^2 - d_i^2)} \prod_{k=i+1}^n \frac{(\hat{\sigma}_k^2 - d_i^2)}{(d_k^2 - d_i^2)}} \quad (\text{式 1 1})$$

【 0 1 8 1 】

この式 1 1 から、式 5 を計算するのに、一部の特異値に対応する式 1 1 の部分を計算しておき、他の特異値に対応する式 1 1 の部分を後から掛け合わせることによって、最終的に

30

【 数 5 1 】

$$|\hat{z}_i|$$

を算出できることがわかる。したがって、特異値算出手段 1 7 a、1 7 b のそれぞれは、まず、2 個の行列 B_1 、 B_2 の特異値と行列要素とを特異値分解記憶部 1 6 から読み出し、2 個の行列 B_1 、 B_2 の分割時に発生した 2 個の要素を対角行列記憶部 1 3 から読み出す。その読み出された行列要素と、2 個の要素とを用いて、 z_i の値を知ることができる。その後、各特異値算出手段 1 7 a、1 7 b は、式 2 を用いて、それぞれが担当する特異値を算出する。この処理は、並列実行することができる。

【 0 1 8 2 】

次に、特異値算出手段 1 7 a は、算出した特異値を用いて計算することができる式 1 1 の部分について計算する。また同様に、特異値算出手段 1 7 b も、算出した特異値を用いて計算することができる式 1 1 の部分について計算する。そして、特異値算出手段 1 7 a、1 7 b は、その計算した値を交換し、あらかじめ計算していた値と掛け合わせるによって、最終的に式 1 1 の値を計算することができる。このように、特異値算出手段 1 7 a、1 7 b は、式 1 1 を計算する処理も並列実行することができる。

40

【 0 1 8 3 】

次に、特異値算出手段 1 7 a、1 7 b は、式 4 を用いて、それぞれが算出した特異値に対応する特異ベクトルを計算する。このように、特異値算出手段 1 7 a、1 7 b は、右直交行列 V_M を計算する処理も並列実行することができる。

50

【0184】

その後、特異値算出手段17a、あるいは特異値算出手段17bが、式6から式9を用いて行列 B_0 の行列要素を計算することによって、分割元の行列 B_0 の特異値と行列要素とを算出する処理が終了する。このように、分割された2個の行列 B_1 、 B_2 の特異値と行列要素とから、分割元の行列 B_0 の特異値と行列要素とを算出する処理を、特異値算出手段17a、17bによって並列実行することができる。

【0185】

上記のような各構成要素における並列処理において、各手段が特異値等の情報を格納するメモリを用いる場合に、複数の手段が同一のメモリ、すなわち共有メモリを使用してもよく、あるいは、各手段がそれぞれ別のメモリを使用してもよい。

10

【0186】

なお、図23を用いて、特異値分解部15や特異値算出部17等が2個の手段によって並列処理を実行する場合について説明したが、特異値分解部15や特異値算出部17等が3以上の手段を備え、並列処理を実行してもよい。また、特異値分解部15、特異値算出部17、コレスキー分解部21、第1特異ベクトル算出部22、第2特異ベクトル算出部23のそれぞれにおいて並列処理が実行される場合について説明したが、いずれかの任意の1以上の部において、並列処理が実行されなくてもよい。例えば、特異値分解部15において並列処理が行われなくてもよい。

【0187】

また、その並列処理は、1の装置において、2以上のCPU等を用いて実行されてもよく、2以上の装置において実行されてもよい。例えば、図24で示されるように、装置Aと、装置Bとがそれぞれ特異値分解手段15a、15bを備え、各装置において、特異値分解の処理が並列実行されてもよい。この場合には、装置Aの特異値分解手段15aを備える特異値分解部15-1と、装置Bの特異値分解手段15bを備える特異値分解部15-2とによって特異値分解部15が構成されることになる。したがって、特異値分解装置1は、装置Aと、装置Bとからなるシステムを構成することになる。ここでは、特異値分解部15の並列処理について説明したが、その他の特異値算出部17やコレスキー分解部21等についても、2以上の装置による並列処理を行ってもよい。

20

【0188】

[2次元画像から3次元へ復元する画像処理への応用]

30

次に、物体の2次元画像から3次元へ復元する画像処理に特異値分解を応用する場合について説明する。

【0189】

複数の2次元画像から3次元復元を行う処理は、以下の各ステップによって行われる。

- (1) 2次元画像から特徴点を抽出するステップ。
- (2) 特徴点データより形状(元の物体の特徴点の3次元座標データ)及び回転(3次元データから特徴点データへの変換)に関するデータを計算するステップ。
- (3) 形状及び回転のデータより可視化を行うステップ。

【0190】

以下、上記(1)、(2)の各ステップについて、図25のフローチャートを用いて説明する。ここで、2次元画像は、例えば、スキャナやデジタルスチルカメラ、デジタルビデオカメラ等の光学的読み取り機器によって読み取られた2次元画像であってもよい。

40

【0191】

ステップS5001において、2次元画像 j ($j = 1, \dots, m$ 、 m は3以上の整数)から特徴点 i ($i = 1, \dots, n$ 、 n は2以上の整数)の座標(x_i^j, y_i^j)を抽出する。取り扱う2次元画像は、弱中心射影画像であることが好ましい。このとき、次の式が成り立つ。

【数52】

$$\begin{pmatrix} x_i^j \\ y_i^j \end{pmatrix} = s_j \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1,j}^T \\ \mathbf{r}_{2,j}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

【0192】

ここで、 s_j は物体のスケールに相対する j 番目の画像のスケール、 $\mathbf{r}_{1,j}, \mathbf{r}_{2,j}$ はそれぞれ物体座標系に相対する j 番目のカメラ座標系の回転行列の1番目と2番目の行ベクトル、 $(X_i, Y_i, Z_i)^T$ は i 番目の点の3次元座標である。物体のスケールは1番目の画像のスケールと同じにし ($s_1 = 1$)、物体の座標系の姿勢は1番目の画像のカメラ座標系と同じにする ($\mathbf{r}_{1,1} = (1, 0, 0)^T, \mathbf{r}_{2,1} = (0, 1, 0)^T$)。 m 枚全ての画像における n 個全ての点の座標を行列 D の要素として並べると、次式のようになる。

【数53】

$$D = MS$$

ただし、 $D = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_i^1 & \dots & x_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^j & \dots & x_i^j & \dots & x_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^m & \dots & x_i^m & \dots & x_n^m \\ y_1^1 & \dots & y_i^1 & \dots & y_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^j & \dots & y_i^j & \dots & y_n^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^m & \dots & y_i^m & \dots & y_n^m \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} s_1 \mathbf{r}_{1,1}^T \\ \dots \\ s_j \mathbf{r}_{1,j}^T \\ \dots \\ s_m \mathbf{r}_{1,m}^T \\ s_1 \mathbf{r}_{2,1}^T \\ \dots \\ s_j \mathbf{r}_{2,j}^T \\ \dots \\ s_m \mathbf{r}_{2,m}^T \end{pmatrix},$

$$S = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_i & \dots & X_n \\ Y_1 & \dots & Y_i & \dots & Y_n \\ Z_1 & \dots & Z_i & \dots & Z_n \end{pmatrix}$$

【0193】

M と S の形から分かるように、 D のランクは3である。ここで、ステップ5001において、行列 D が与えられている。以下、回転に関するデータ M 及び形状 S を求める。

【0194】

そこで、行列 D の特異値分解

$$D = U V^T$$

を考える。ここで、 D は特異値を大小順に対角線上に並べたもので、 U 及び V はそれぞれ左直交行列、及び右直交行列である。この特異値分解として、前述の方法を用いることができる。すなわち、特異値分解装置1において、行列記憶部11が記憶している行列 A を、このたびの行列 D とすることにより、前述の説明のようにして、行列 A の特異値分解がなされることになる。なお、特異値分解装置1において、特異ベクトル記憶部20に蓄積されるのは、行列 D を変換した上2重対角行列 B の特異ベクトルであるので、その特異ベクトルを、前述の説明のようにして、行列 D の特異ベクトルに変換する必要がある。

【0195】

ここで、画像のデジタル誤差のため、ゼロでない特異値は3つ以上出てくる。しかし、4番目以降の特異値はノイズによるもので、最初の3つの特異値と比べて格段に小さい。そこで、ステップ5002では、最初の3つの特異値に対して特異ベクトルを計算する。採用する3個のベクトルをまとめると、次式となる。

10

20

30

40

50

$$D' = L'^{-1} R'^T = M' S'$$

ただし、 $M' = L' (\quad)^{-1/2}$ 、 $S' = (\quad)^{-1/2} R'^T$ 、 D' は $D - D'$ を最小にするランク 3 の行列である。

【0196】

次に、 D' から M 及び S を求めたいが、その組合せは唯一ではない。なぜなら、任意の正則行列 C が

$$D' = (M' C) (C^{-1} S')$$

を満たすからである。そこで、上式における C を $M = M' C$ を満たすように決める。 C は下記の式を満たす。

【数54】

$$MM^T = M' C C^T M'^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & s_m^2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & s_m^2 \end{pmatrix}$$

10

【0197】

$E = C C^T$ とすると、上式から E の 6 つの要素に関する $2m + 1$ 個の線形方程式が得られる。 $m = 3$ であるので、 E の要素を一意に決めることができる。ステップ S5003において、行列 E を求める。

20

【0198】

次に、ステップ S5004において、 E から C を求める。 C の自由度 (9) は E の自由度 (6) より多い。そこで、条件 $r_{1j} = (1, 0, 0)^T$ 、 $r_{2j} = (0, 1, 0)^T$ を加えれば、 C を決めることができる。このとき 2 つの解 (Necker Reversal) が出る。

次に、ステップ S5005において、 $M = M' C$ 及び $S = C^{-1} S'$ より、回転に関するデータ M 及び形状 S が決まる。

【0199】

30

[文書検索への応用]

次に、文書検索処理に特異値分解を応用する場合について説明する。文書中からその文書の内容に関連する索引語を抽出し、索引語の重みを計算する処理の後、ベクトル空間モデルでは、この索引語の重みを要素とするベクトルで文書を表現する。ここで、検索対象となる文書を d_1, d_2, \dots, d_n とし、これら文書集合全体を通して全部で m 個の索引語 w_1, w_2, \dots, w_m があるとする。このとき、文書 d_j は、次のようなベクトルで表現されることになる。これを文書ベクトルと呼ぶ。

【数55】

$$d_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{mj} \end{pmatrix}$$

40

【0200】

ここで、 d_{ij} は索引語 w_i の文書 d_j における重みである。また、文書集合全体は、次のような $m \times n$ 行列 D によって表現することができる。

【数 5 6】

$$D = (\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_n) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

【0 2 0 1】

行列 D を索引語文書行列と呼ぶ。索引語文書行列の各列は文書に関する情報を表している文書ベクトルであるが、同様に、索引語文書行列の各行は索引語に関する情報を表しているベクトルであり、これを索引語ベクトルと呼ぶ。検索質問も、文書と同様に、索引語の重みを要素とするベクトルで表現することができる。検索質問文に含まれる索引語 w_i の重みを q_i とすると、検索質問ベクトル \mathbf{q} は次のように表されることになる。

10

【数 5 7】

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$$

【0 2 0 2】

実際の文書検索においては、与えられた検索質問文と類似した文書を見つけ出す必要があるが、検索質問ベクトル \mathbf{q} と各文書ベクトル \mathbf{d}_j の間の類似度を計算することにより行う。ベクトル間の類似度の定義としてはさまざまなものが考えられるが、文書検索においてよく用いられているものはコサイン尺度（2つのベクトルのなす角度）または内積である。

20

【数 5 8】

$$\cos(\mathbf{d}_j, \mathbf{q}) = \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{q}}{\|\mathbf{d}_j\| \|\mathbf{q}\|} = \frac{\sum_{i=1}^m d_{ij} q_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m d_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m q_i^2}} \quad (\text{コサイン尺度})$$

30

$$\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{q} = \sum_{i=1}^m d_{ij} q_i \quad (\text{内積})$$

【0 2 0 3】

なお、ベクトルの長さが 1 に正規化（コサイン正規化）されている場合には、コサイン尺度と内積とは一致する。

【0 2 0 4】

図 2 6 は、本実施の形態による特異値分解装置 1 を利用した文書検索方法の一例を示すフローチャートである。

ステップ 6 0 0 1 において、質問ベクトル \mathbf{q} を受け取る。

40

【0 2 0 5】

ここでは、 D の近似行列 D_k を使った検索を考える。ベクトル空間モデルでは、検索質問ベクトル \mathbf{q} と索引語文書行列 D 中の各文書ベクトル \mathbf{d}_j の間の類似度を計算することにより検索を行うが、ここでは D の代わりに D_k を使う。ベクトル空間モデルでは、文書ベクトルの次元数は索引語の総数と等しい。したがって、検索対象となる文書が増えるに従い、文書ベクトルの次元数も増加する傾向にある。しかし、次元数が増加してくると、コンピュータのメモリによる制限や検索時間の増大などの問題が生じてくるばかりでなく、文書中に含まれる不必要な索引語がノイズ的な影響を及ぼし、検索精度を低下させてしまうという現象も起こってくる。潜在的意味インデキシング (latent semantic indexing; LSI) は、高次元の空間にある文書ベクトルを低次元の

50

空間へと射影することにより、検索精度の改善を図る技術である。高次元の空間では別々に扱われていた索引語が、低次元の空間では相互に関連を持ったものとして扱われる可能性もあるため、索引語の持つ意味や概念に基づく検索を行うことができる。たとえば、通常のベクトル空間モデルでは"car"という索引語と"automobile"という索引語はまったく別物であり、一方の索引語による質問ではもう片方の索引語を含んだ文書を検索することができない。しかし、低次元の空間ではこれらの意味的に関連した索引語は1つの次元に縮退することが期待できるため、"car"という検索質問によって"car"を含む文書ばかりでなく"automobile"を含む文書をも検索することが可能となる。潜在的意味インデキシングでは、特異値分解により高次元ベクトルの次元削減を行うが、これは基本的に多変量解析における主成分分析と等価である。

10

【0206】

ステップS6002において、kを選択する。ここでは、 $k < r$ なるkの値を選択する。 $r = \min(n, m)$ である。kの値は、予め与えられていてもよいし、計算ごとに選択可能であってもよい。

【0207】

次に、ステップS6003では、行列Dの特異値分解を行う。この特異値分解として、前述の方法を用いることができる。すなわち、特異値分解装置1において、行列記憶部11が記憶している行列Aを、このたびの行列Dとすることにより、前述の説明のようにして、行列Aの特異値分解がなされることになる。なお、特異値分解装置1において、特異ベクトル記憶部20に蓄積されるのは、行列Dを変換した上2重対角行列Bの特異ベクトルであるので、その特異ベクトルを、前述の説明のようにして、行列Dの特異ベクトルに変換する必要がある。また、この特異値分解では、計算された特異値のうち、大きい順に1番目からk番目までのk個の特異値に対してDの特異ベクトルを算出する。kは、ステップS6002で選択された値である。

20

【0208】

すなわち、

$$D_k = U_k V_k^T$$

なる U_k 及び V_k を計算する。ここで、 U_k は、最初のk個の左特異ベクトルのみから構成される $m \times k$ 行列であり、 V_k は、最初のk個の右特異ベクトルのみから構成される $n \times k$ 行列であり、 Σ_k は、最初のk個の特異値のみから構成される $k \times k$ 対角行列である。

30

【0209】

次に、ステップ6004において、行列 D_k と質問ベクトル q との類似度を計算する。いま、ベクトル e_j をn次元の単位ベクトルとすると、 D_k のj番目の文書ベクトルは $D_k e_j$ で表すことができる。文書ベクトル $D_k e_j$ と検索質問ベクトル q との間の類似度計算は、

【数59】

$$\begin{aligned} \cos(D_k e_j, q) &= \frac{(D_k e_j) \cdot q}{\|D_k e_j\| \|q\|} = \frac{(D_k e_j)^T q}{\|D_k e_j\| \|q\|} \\ &= \frac{(U_k \Sigma_k V_k^T e_j)^T q}{\|U_k \Sigma_k V_k^T e_j\| \|q\|} = \frac{e_j^T V_k \Sigma_k U_k^T q}{\|\Sigma_k V_k^T e_j\| \|q\|} \\ &= \frac{(\Sigma_k V_k^T e_j)^T (U_k^T q)}{\|\Sigma_k V_k^T e_j\| \|q\|} \end{aligned}$$

40

としてもよいが、別の定義を用いてもよい。上式では、 D_k を U_k 、 Σ_k 、 V_k から再構成する必要はなく特異値分解の結果から、直接、類似度を計算できることを示している。

上式の中に現われる $\Sigma_k V_k^T e_j$ は、

$$\Sigma_k V_k^T e_j = U_k^T D_k e_j$$

と書き直すことができる。この式の右辺は、近似行列 D_k におけるj番目の文書ベクトル

50

の基底 U_k のもとでの座標 (文書の k 次元表現) を表している。同様に、上式の中の $U_k^T q$ は、検索質問ベクトル q の基底 U_k のもとでの座標 (検索質問の k 次元表現) である。

【0210】

ステップ S6005 において、ステップ S6004 において計算された類似度を基準に、検索結果を出力する。

最後に、数値実験による性能の評価について説明する。ここでは、本実施の形態による特異値分解装置 1 の方法と、標準的な分割統治法と、シフト付き QR 法とを比較した。分割統治法としては、LAPACK で提供されている DBDSDC を用いた。QR 法としては、LAPACK で提供されている DBDSQR を用いた。実験で用いる LAPACK は ATLAS (Automatically Tuned Linear Algebra Software) で最適化した BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) を呼び出す。また、本実施の形態による特異値分解装置 1 の特異値分解部 15 では、QR 法を用いて特異値分解を行った。計算機は、キャッシュメモリ L1D: 64KB, L1I: 64KB, L2: 1024KB を搭載した Opteron 1.8GHz を用いた。

10

【0211】

図 27 は、計算時間を示す図である。特異値分解装置 1 による特異値分解が、他の特異値分解方法よりも非常に高速であることがわかる。特に、分割統治法 (D&C) と比較すると、ベクトル更新を省略した効果がわかる。

20

【0212】

図 28 は、異なる行列サイズの計算時間の変化を示す図である。特異値分解装置 1 による特異値分解は、ほぼ $O(n^2)$ という計算量を持つことがわかる。

なお、図 27 及び図 28 で示される計算時間の測定では、対角成分が 2.001, 非対角成分が 2.0 であり、近接特異値を持たない行列について計算を行った。

【0213】

図 29 は、計算制度を示す図である。特異値分解装置 1 による特異値の算出は、分割統治法と同程度の高い精度を有することがわかる。図 29 では、1000 個のランダム行列を解き、精度を評価した。行列サイズは、1000 である。

【0214】

以上のように、本実施の形態による特異値分解装置 1 では、分割統治法を用いて特異値のみを算出するため、標準的な分割統治法で実行されるベクトル更新が必要なくなり、標準的な分割統治法よりも非常に高速である。また、特異値から特異ベクトルを算出する処理も、高速に処理することができる。さらに、QR 法では特異値を算出する段階の並列化が困難であるが、本実施の形態による特異値分解装置 1 では、特異値を算出する段階、及び特異値から特異ベクトルを算出する段階のそれぞれにおいて、本質的に高い並列性を持つ。また、本実施の形態による特異値分解装置 1 の精度は、分割統治法や QR 法とほぼ同等の精度が得られることがわかる。

30

【0215】

なお、本実施の形態による特異値分解装置 1 は、スタンドアロンの装置であってもよく、サーバクライアントシステムにおけるサーバ装置であってもよく、前述のように、複数の装置から構成されるシステムであってもよい。特異値分解装置 1 がサーバクライアントシステムにおけるサーバ装置である場合には、行列記憶部 11 で記憶される行列 A や、特異値記憶部 18 で記憶される特異値や特異ベクトル記憶部 20 で記憶される特異ベクトル等は、インターネットやイントラネット等の通信回線を介して送受信されてもよい。

40

【0216】

また、特異値分解装置 1 における一部の処理を、特異値分解装置 1 以外において行ってもよい。例えば、行列分解部 14 による 2 重対角行列 B を分割する処理、あるいは、特異値分解部 15 による特異値分解の処理を、特異値分解装置 1 において実行しなくてもよい。その場合には、例えば、2 重対角行列 B が分割された結果である、あらかじめ決められ

50

た大きさ以下の各 2 重対角行列が、入力デバイスや通信回線、記録媒体等を介して受け付けられ、対角行列記憶部 13 で記憶されていてもよい。また、例えば、そのあらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列に対して特異値分解が行われた結果である、各 2 重対角行列の特異値と、各 2 重対角行列の特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが、入力デバイスや通信回線、記録媒体等を介して受け付けられ、特異値分解記憶部 15 で記憶されていてもよい。

【0217】

また、上記実施の形態において、各処理または各機能は、単一の装置または単一のシステムによって集中処理されることによって実現されてもよく、あるいは、複数の装置または複数のシステムによって分散処理されることによって実現されてもよい。

10

【0218】

また、上記実施の形態において、各構成要素は専用のハードウェアにより構成されてもよく、あるいは、ソフトウェアにより実現可能な構成要素については、プログラムを実行することによって実現されてもよい。例えば、ハードディスクや半導体メモリ等の記録媒体に記録されたソフトウェア・プログラムを CPU 等のプログラム実行部が読み出して実行することによって、各構成要素が実現され得る。なお、上記実施の形態における特異値分解装置を実現するソフトウェアは、以下のようなプログラムである。つまり、このプログラムは、コンピュータに、2 重対角行列 B が 2 個の 2 重対角行列に分割され、その 2 重対角行列が 2 個の 2 重対角行列に分割される処理が、分割後の各 2 重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返され、当該あらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列に対して特異値分解が行われた結果である、前記各 2 重対角行列の特異値と、前記各 2 重対角行列の特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とが記憶される特異値分解記憶部から、各 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の 2 重対角行列の特異値と、分割元の 2 重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異値を算出するまで繰り返し、前記 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異値を特異値記憶部に蓄積する特異値算出ステップと、前記 2 重対角行列 B が記憶される対角行列記憶部から 2 重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、2 重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用いて 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出ステップと、を実現させるためのものである。

20

30

【0219】

また、このプログラムでは、コンピュータに、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列も記憶される前記対角行列記憶部から、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列を読み出し、前記各 2 重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各 2 重対角行列の特異値と、前記各 2 重対角行列の特異ベクトルとを算出し、当該特異値と、当該特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とを前記特異値分解記憶部に蓄積する特異値分解ステップをさらに実行させてもよい。

【0220】

また、上記実施の形態における特異値分解装置を実現するソフトウェアは、以下のようなプログラムである。つまり、このプログラムは、コンピュータに、2 重対角行列 B が記憶される対角行列記憶部から前記 2 重対角行列 B を読み出し、当該 2 重対角行列 B を 2 個の 2 重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積し、その 2 重対角行列を 2 個の 2 重対角行列に分割して前記対角行列記憶部に蓄積する処理を、分割後の各 2 重対角行列があらかじめ決められた大きさ以下となるまで繰り返す行列分割ステップと、前記あらかじめ決められた大きさ以下の各 2 重対角行列を前記対角行列記憶部から読み出し、前記各 2 重対角行列に対して特異値分解を行い、前記各 2 重対角行列の特異値と、前記各 2 重対角行列の特異ベクトルとを算出し、特異値分解された特異値と、特異ベクトルからなる左右直交行列の一部の要素である行列要素とを特異値分解記憶部に蓄積する特異値分解ステップ

40

50

と、各 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを前記特異値分解記憶部から読み出し、前記特異値と、前記行列要素とから、分割元の 2 重対角行列の特異値と、分割元の 2 重対角行列の行列要素とを算出して前記特異値分解記憶部に蓄積し、その分割元の 2 重対角行列の特異値と、行列要素とを算出する処理を、2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異値を算出するまで繰り返し、前記 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異値を特異値記憶部に蓄積する特異値算出ステップと、前記対角行列記憶部から 2 重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、2 重対角行列 B とその特異値とから、ツイスト分解法を用いて 2 重対角行列 B の少なくとも 1 個の特異ベクトルを算出して特異ベクトル記憶部に蓄積する特異ベクトル算出ステップと、を実行させるためのものである。

10

【0221】

また、このプログラムでは、前記特異ベクトル算出ステップは、前記対角行列記憶部から 2 重対角行列 B を読み出し、前記特異値記憶部から前記 2 重対角行列 B の特異値を読み出し、前記 2 重対角行列 B の各要素に関してミウラ変換、d L V v 型変換、逆ミウラ変換を行うことによって、前記 2 重対角行列 B を上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ にコレスキー分解するコレスキー分解ステップと、前記上 2 重対角行列 $B^{(+1)}$ 及び下 2 重対角行列 $B^{(-1)}$ の各要素と、前記 2 重対角行列 B の特異値とを用いて一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第 1 特異ベクトル算出ステップと、前記第 1 特異ベクトル算出ステップで算出した一方の左右直交行列を構成する特異ベクトルと、前記 2 重対角行列 B の特異値と、前記 2 重

20

対角行列 B とを用いて他方の左右直交行列を構成する特異ベクトルを算出して前記特異ベクトル記憶部に蓄積する第 2 特異ベクトル算出ステップと、をさらに備えてもよい。

なお、上記プログラムにおいて、情報を蓄積する処理などでは、ハードウェアでしか行われな

【0222】

また、このプログラムは、サーバなどからダウンロードされることによって実行されてもよく、所定の記録媒体（例えば、CD-ROM などの光ディスクや磁気ディスク、半導体メモリなど）に記録されたプログラムが読み出されることによって実行されてもよい。

【0223】

また、このプログラムを実行するコンピュータは、単数であってもよく、複数であってもよい。すなわち、集中処理を行ってもよく、あるいは分散処理を行ってもよい。

30

【0224】

図 30 は、上記プログラムを実行して、上記実施の形態による特異値分解装置 1 を実現するコンピュータの外観の一例を示す模式図である。上記実施の形態は、コンピュータハードウェア及びその上で実行されるコンピュータプログラムによって実現される。

【0225】

図 30 において、コンピュータシステム 100 は、CD-ROM (Compact Disk Read Only Memory) ドライブ 105、FD (Flexible Disk) ドライブ 106 を含むコンピュータ 101 と、キーボード 102 と、マウス 103 と、モニタ 104 とを備える。

40

【0226】

図 31 は、コンピュータシステムを示す図である。図 31 において、コンピュータ 101 は、CD-ROM ドライブ 105、FD ドライブ 106 に加えて、CPU (Central Processing Unit) 111 と、ブートアッププログラム等のプログラムを記憶するための ROM (Read Only Memory) 112 と、CPU 111 に接続され、アプリケーションプログラムの命令を一時的に記憶すると共に、一時記憶空間を提供する RAM (Random Access Memory) 113 と、アプリケーションプログラム、システムプログラム、及びデータを記憶するハードディスク 114 と、CPU 111、ROM 112 等を相互に接続するバス 115 とを備える。なお、コンピュータ 101 は、LAN への接続を提供する図示しないネットワークカードを含ん

50

でもよい。

【0227】

コンピュータシステム100に、上記実施の形態による特異値分解装置1の機能を実行させるプログラムは、CD-ROM121、またはFD122に記憶されて、CD-ROMドライブ105、またはFDドライブ106に挿入され、ハードディスク114に転送されてもよい。これに代えて、そのプログラムは、図示しないネットワークを介してコンピュータ101に送信され、ハードディスク114に記憶されてもよい。プログラムは実行の際にRAM113にロードされる。なお、プログラムは、CD-ROM121やFD122、またはネットワークから直接、ロードされてもよい。

【0228】

また、行列記憶部11、対角行列記憶部13、特異値分解記憶部16、特異値記憶部18、特異ベクトル記憶部20は、RAM113やハードディスク114によって実現されてもよい。

【0229】

プログラムは、コンピュータ101に、上記実施の形態による特異値分解装置1の機能を実行させるオペレーティングシステム(OS)、またはサードパーティプログラム等を必ずしも含まなくてもよい。プログラムは、制御された態様で適切な機能(モジュール)を呼び出し、所望の結果が得られるようにする命令の部分のみを含んでいてもよい。コンピュータシステム100がどのように動作するのかについては周知であり、詳細な説明を省略する。

【0230】

また、本発明は、以上の実施の形態に限定されることなく、種々の変更が可能であり、それらも本発明の範囲内に包含されるものであることは言うまでもない。

また、本発明のほんのいくつかの典型的な実施例について上で詳細に説明したが、その典型的な実施例において、発明の利益と新規な技術から実質的にはずれることなく多くの変更が可能であることを当業者は容易に認識することができるであろう。したがって、そのようなすべての変更は、本発明の範囲に含まれるものである。

【産業上の利用可能性】

【0231】

以上のように、本発明による特異値分解装置等によれば、特異値分解を高速に処理することができ、画像処理や検索処理、その他の特異値分解を用いる処理を実行する装置等において有用である。

【図面の簡単な説明】

【0232】

【図1】本発明の実施の形態1による特異値分解装置の構成を示すブロック図

【図2】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図3】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図4】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図5】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図6】同実施の形態における上2重対角行列Bの分割について説明するための図

【図7】同実施の形態における上2重対角行列Bの分割について説明するための図

【図8】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図9】同実施の形態における上2重対角行列Bの分割について説明するための図

【図10】同実施の形態における上2重対角行列Bの特異値の算出について説明するための図

【図11】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図12】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート

【図13】同実施の形態における上2重対角行列Bの特異値の算出について説明するための図

【図14】同実施の形態におけるコレスキー分解について説明するための図

10

20

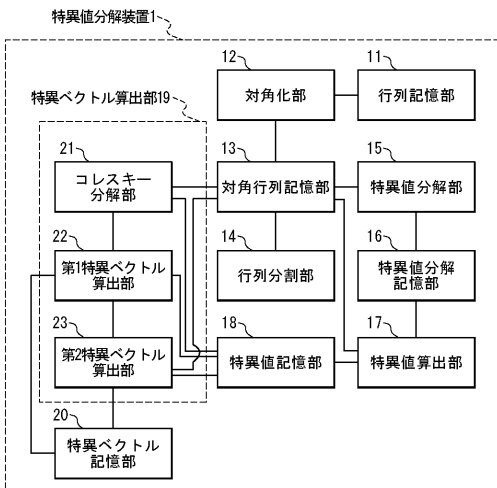
30

40

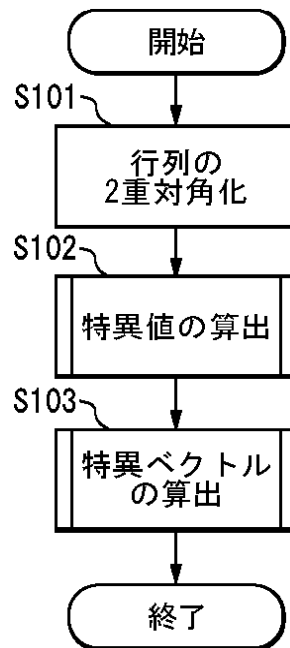
50

- 【図15】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図16】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図17】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図18】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図19】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図20】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図21A】同実施の形態におけるq d型ツイスト分解法について説明するための図
- 【図21B】同実施の形態におけるLV型ツイスト分解法について説明するための図
- 【図22】同実施の形態による特異値分解装置の動作を示すフローチャート
- 【図23】同実施の形態による特異値分解装置の構成の他の一例を示すブロック図 10
- 【図24】同実施の形態による特異値分解装置の構成の他の一例を示すブロック図
- 【図25】同実施の形態における画像処理の一例を示すフローチャート
- 【図26】同実施の形態における文書検索処理の一例を示すフローチャート
- 【図27】同実施の形態による特異値分解と従来の特異値分解との比較について説明するための図
- 【図28】同実施の形態による特異値分解と従来の特異値分解との比較について説明するための図
- 【図29】同実施の形態による特異値分解と従来の特異値分解との比較について説明するための図
- 【図30】同実施の形態におけるコンピュータシステムの外観一例を示す模式図 20
- 【図31】同実施の形態におけるコンピュータシステムの構成の一例を示す図

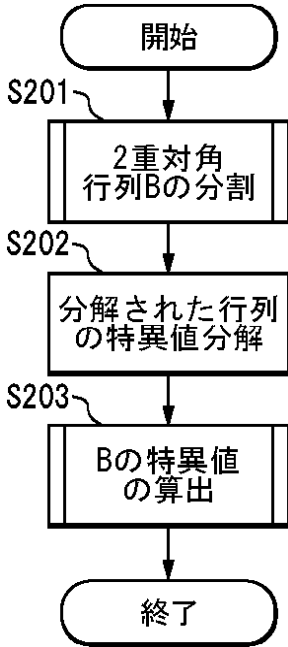
【図1】



【図2】



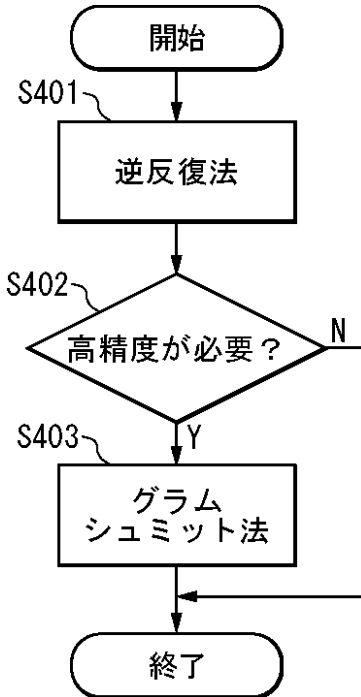
【図3】



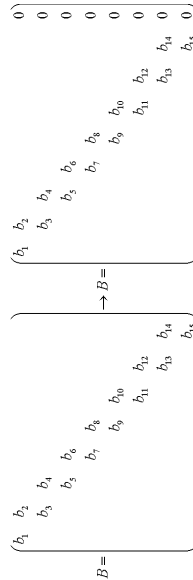
【図4】



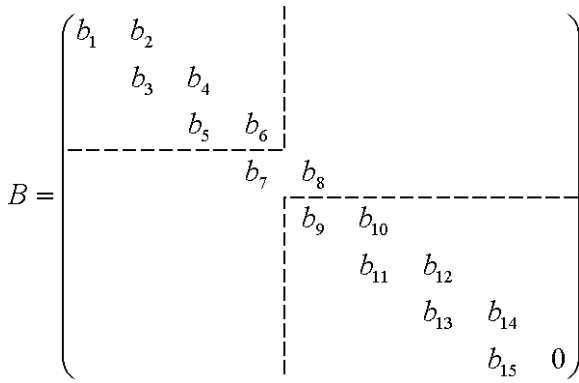
【図5】



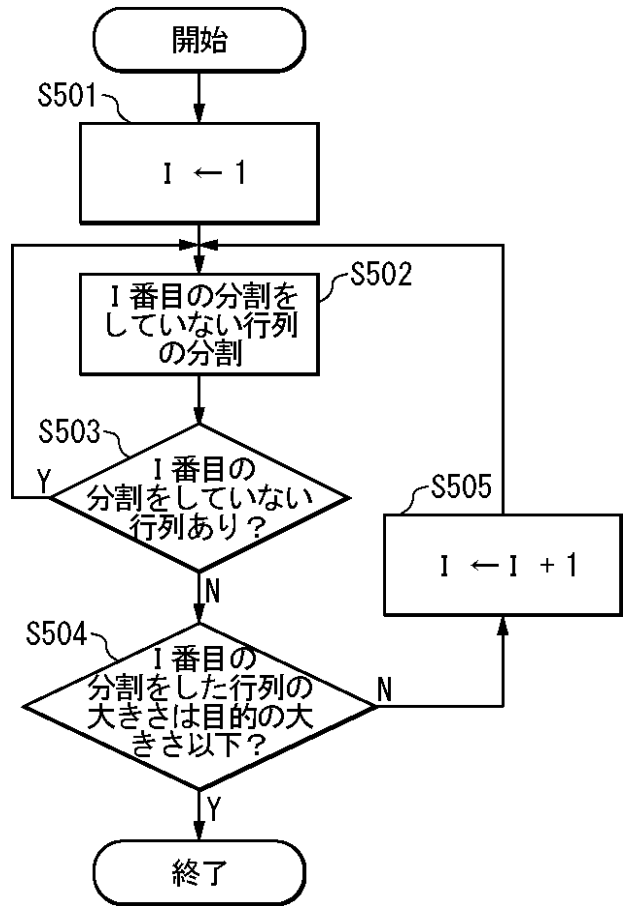
【図6】



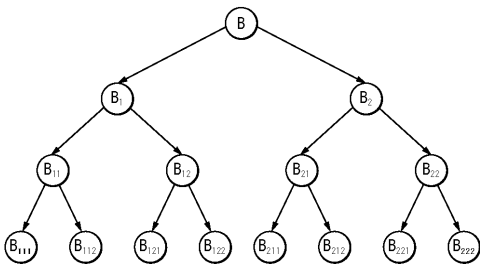
【図7】



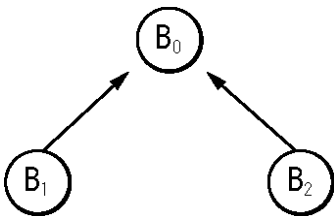
【図8】



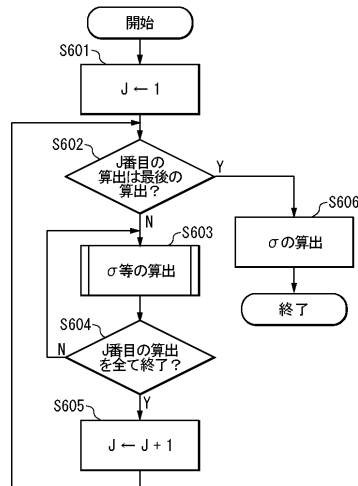
【図9】



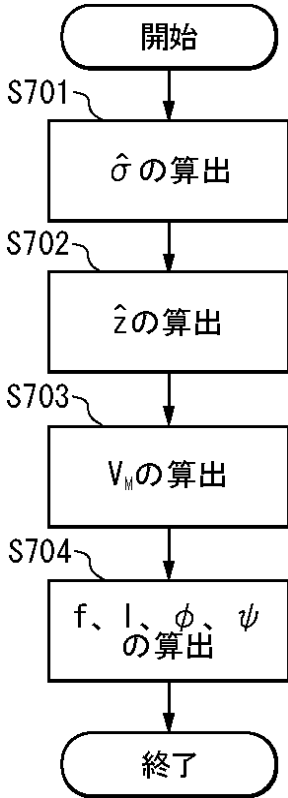
【図10】



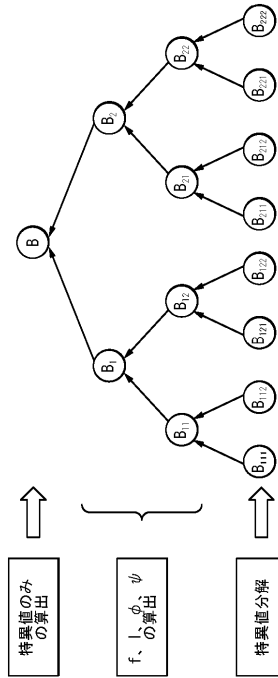
【図11】



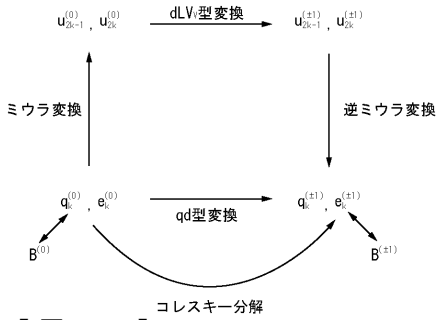
【図12】



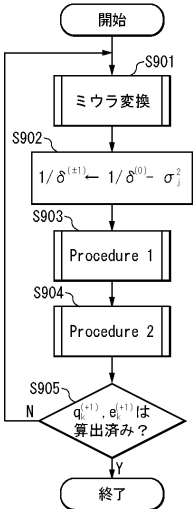
【図13】



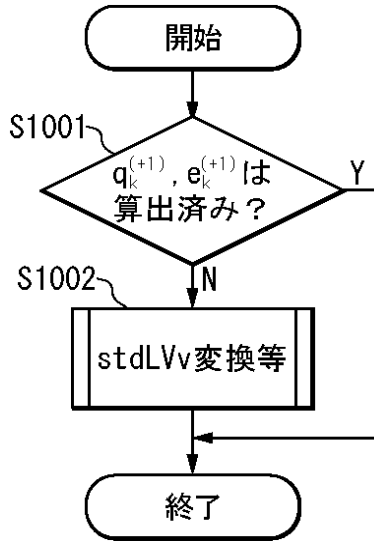
【図14】



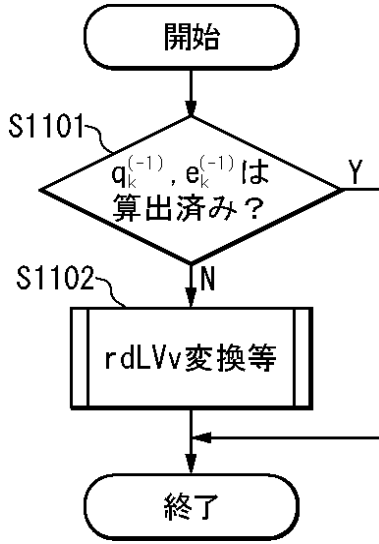
【図15】



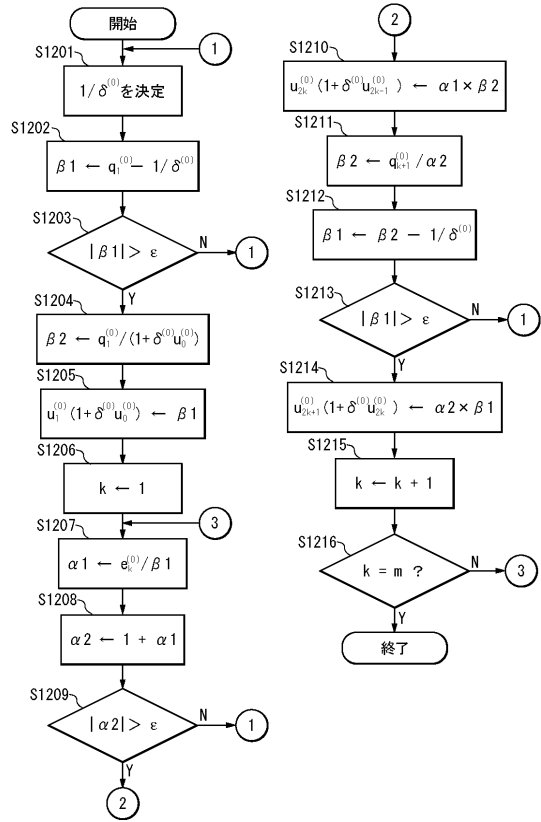
【図16】



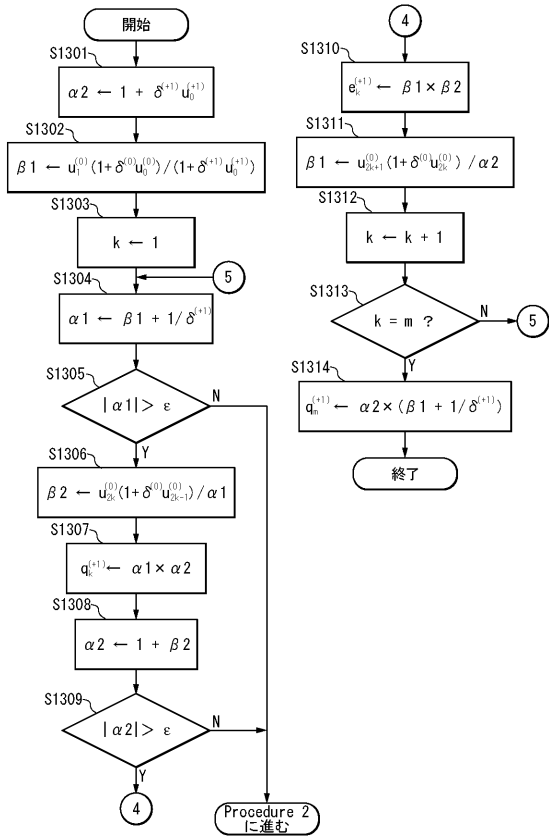
【図17】



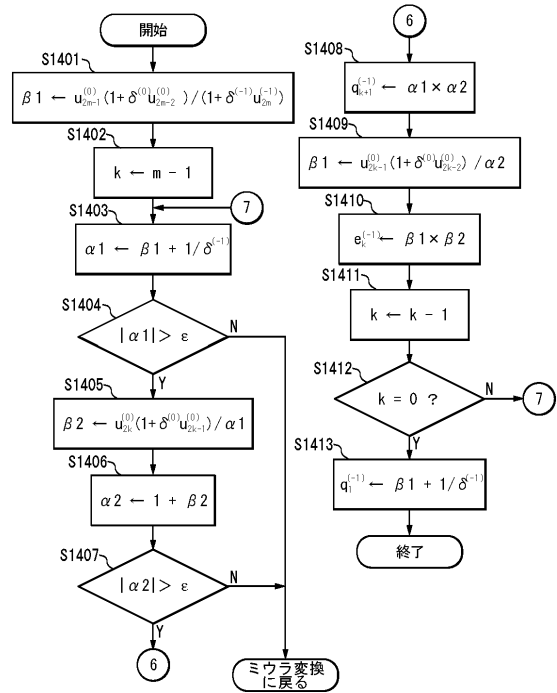
【図18】



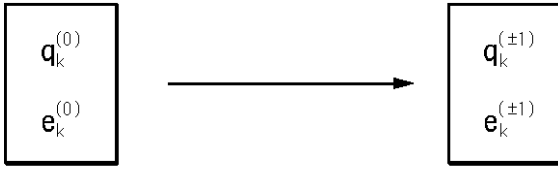
【図19】



【図20】

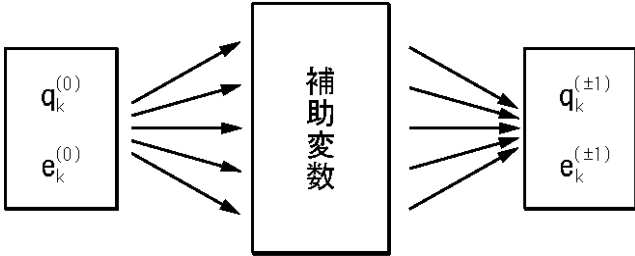


【図21A】



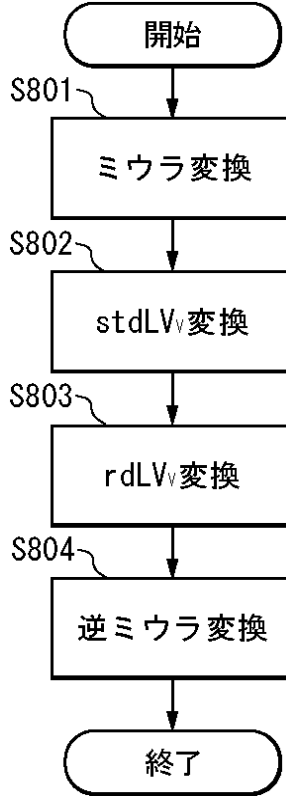
qd型ツイスト分解法

【図21B】

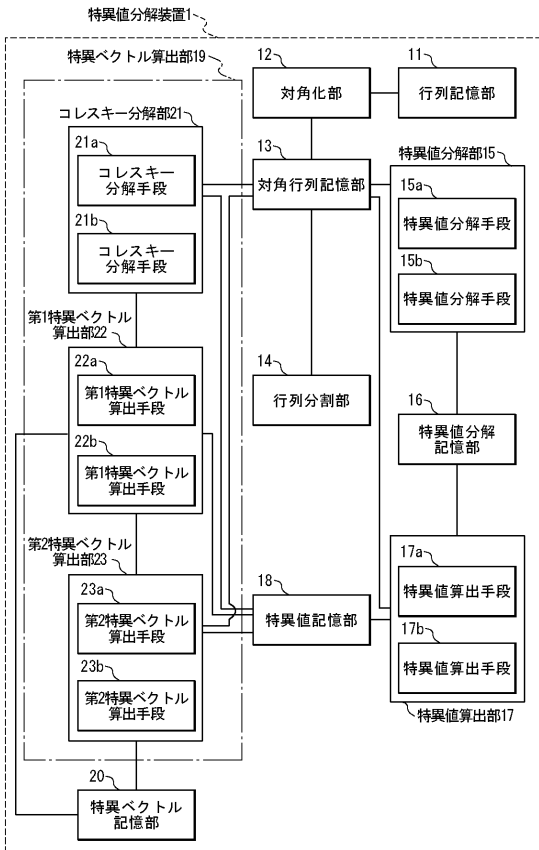


LV型ツイスト分解法

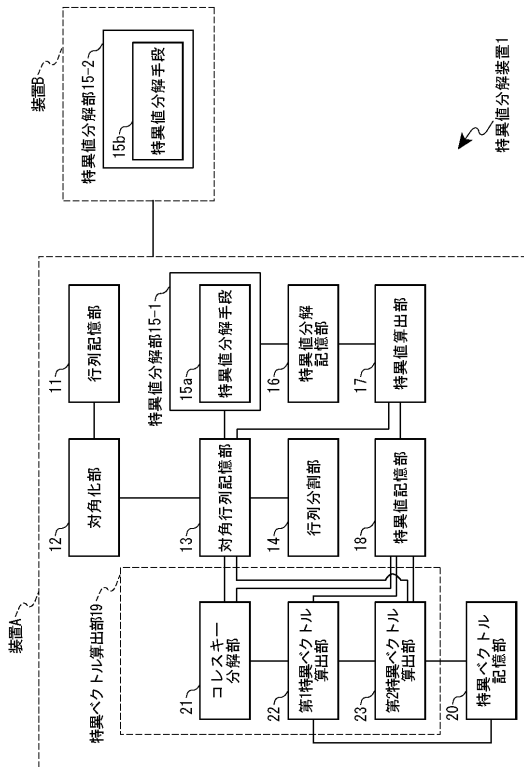
【図22】



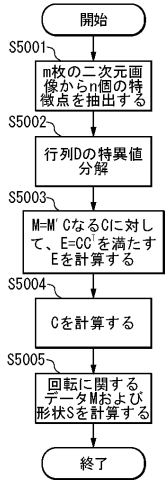
【図23】



【図24】



【図 25】



【図 26】



【図 27】

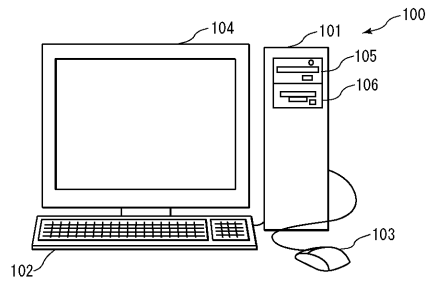
	本発明	D & C	QR
特異値の計算時間(秒)	1.51	—	—
特異ベクトルの計算時間(秒)	4.30	—	—
全体の計算時間(秒)	5.81	170.36	1814.79

【図 28】

計算時間(秒)

行列サイズ	本発明	D & C	QR
3000	5.81	170.36	1814.79
5000	18.17	809.93	—
7000	37.86	—	—

【図 30】

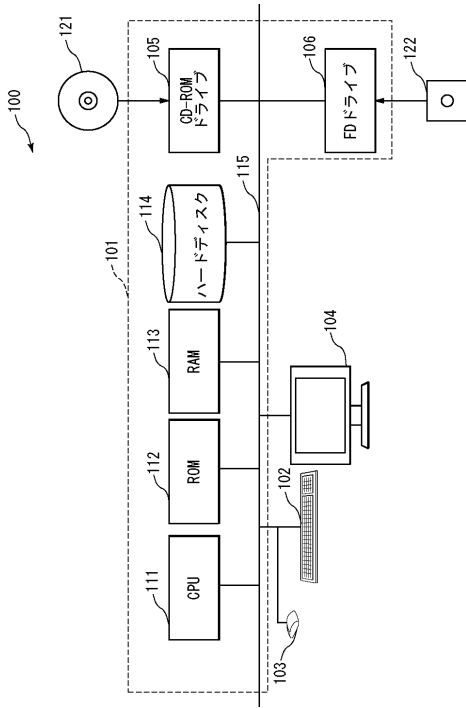


【図 29】

計算精度

	本発明	D & C	QR
Σ	2.1E-13	2.1E-13	1.3E-12
$V^T V - I$	3.7E-10	5.1E-11	1.3E-10
$U^T U - I$	3.6E-10	5.1E-11	1.3E-10
$B - U \Sigma V^T$	4.2E-09	3.0E-11	1.1E-10

【 図 3 1 】



【 国際調査報告 】

INTERNATIONAL SEARCH REPORT		International application No. PCT/JP2006/318713
A. CLASSIFICATION OF SUBJECT MATTER G06F17/12(2006.01) i According to International Patent Classification (IPC) or to both national classification and IPC		
B. FIELDS SEARCHED Minimum documentation searched (classification system followed by classification symbols) G06F17/12 Documentation searched other than minimum documentation to the extent that such documents are included in the fields searched Jitsuyo Shinan Koho 1922-1996 Jitsuyo Shinan Toroku Koho 1996-2006 Kokai Jitsuyo Shinan Koho 1971-2006 Toroku Jitsuyo Shinan Koho 1994-2006 Electronic data base consulted during the international search (name of data base and, where practicable, search terms used) CSDB		
C. DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT		
Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	Taro KONDA, Masami TAKATA, Masashi IWASAKI, Satoshi TSUJIMOTO, Yoshimasa NAKAMURA, "A Parallelization of Singular Value Computation Algorithm by the Lotka-Volterra System", Information Processing Society of Japan Kenkyu Hokoku, 2004-HPC-100, 17 December, 2004 (17.12.04), pages 13 to 18, [CSDB] CS-NG-2005-00821-003	1-23
A	I-SVD: A New Singular Value Decomposition Algorithm. With a High Relative Accuracy. Y. Nakamura & M. Iwasaki. Kyoto Univ. Japan. GAMM2004 200407 <URL:www.math.tu-berlin.de/~kressner/GAMM04/files/nakamura.pdf > [retrieved on 20061211]	1-23
<input checked="" type="checkbox"/> Further documents are listed in the continuation of Box C. <input type="checkbox"/> See patent family annex.		
* Special categories of cited documents: "A" document defining the general state of the art which is not considered to be of particular relevance "E" earlier application or patent but published on or after the international filing date "L" document which may throw doubts on priority claim(s) or which is cited to establish the publication date of another citation or other special reason (as specified) "O" document referring to an oral disclosure, use, exhibition or other means "P" document published prior to the international filing date but later than the priority date claimed "T" later document published after the international filing date or priority date and not in conflict with the application but cited to understand the principle or theory underlying the invention "X" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered novel or cannot be considered to involve an inventive step when the document is taken alone "Y" document of particular relevance; the claimed invention cannot be considered to involve an inventive step when the document is combined with one or more other such documents, such combination being obvious to a person skilled in the art "&" document member of the same patent family		
Date of the actual completion of the international search 11 December, 2006 (11.12.06)		Date of mailing of the international search report 19 December, 2006 (19.12.06)
Name and mailing address of the ISA/ Japanese Patent Office		Authorized officer
Facsimile No.		Telephone No.

INTERNATIONAL SEARCH REPORT

International application No.

PCT/JP2006/318713

C (Continuation). DOCUMENTS CONSIDERED TO BE RELEVANT		
Category*	Citation of document, with indication, where appropriate, of the relevant passages	Relevant to claim No.
A	Masami TAKATA, Masashi IWASAKI, Kinji KIMURA, Yoshimasa NAKAMURA, "Implementation and Its Evaluations of Routine for Computing Singular Values with High Accuracy", Transactions of Information Processing Society of Japan, Vol.46, No.SIG12(ACS11), 15 August, 2005 (15.08.05), pages 299 to 311, [CSDB] CS-NG-2006-00063-020	1-23
A	JP 09-212489 A (Fujitsu Ltd.), 15 August, 1997 (15.08.97), (Family: none)	1-23
P,A	WO 2005/119507 A (Japan Science and Technology Agency), 15 December, 2005 (15.12.05)	1-23

国際調査報告		国際出願番号 PCT/JP2006/318713									
A. 発明の属する分野の分類 (国際特許分類 (IPC)) Int.Cl. G06F17/12(2006.01)i											
B. 調査を行った分野 調査を行った最小限資料 (国際特許分類 (IPC)) Int.Cl. G06F17/12											
最小限資料以外の資料で調査を行った分野に含まれるもの <table border="0"> <tr> <td>日本国実用新案公報</td> <td>1922-1996年</td> </tr> <tr> <td>日本国公開実用新案公報</td> <td>1971-2006年</td> </tr> <tr> <td>日本国実用新案登録公報</td> <td>1996-2006年</td> </tr> <tr> <td>日本国登録実用新案公報</td> <td>1994-2006年</td> </tr> </table>				日本国実用新案公報	1922-1996年	日本国公開実用新案公報	1971-2006年	日本国実用新案登録公報	1996-2006年	日本国登録実用新案公報	1994-2006年
日本国実用新案公報	1922-1996年										
日本国公開実用新案公報	1971-2006年										
日本国実用新案登録公報	1996-2006年										
日本国登録実用新案公報	1994-2006年										
国際調査で使用した電子データベース (データベースの名称、調査に使用した用語) CSDB											
C. 関連すると認められる文献											
引用文献の カテゴリー*	引用文献名 及び一部の箇所が関連するときは、その関連する箇所の表示	関連する 請求の範囲の番号									
A	誉田太朗、高田雅美、岩崎雅史、辻本諭、中村佳正、 T. Konda, M. Takata, M. Iwasaki, S. Tsujimoto, Yoshimasa Nakamura, ロトカ・ボルテラ系による特異値計算アルゴリズムの並列化 A Parallelization of Singular Value Computation Algorithm by the Lotka-V olterra System 情報処理学会研究報告 2004-HPC-100 20041217, Pages: 13-18 [CSDB] CS-NG-2005-00821-003	1-23									
<input checked="" type="checkbox"/> C欄の続きにも文献が列挙されている。		<input type="checkbox"/> パテントファミリーに関する別紙を参照。									
* 引用文献のカテゴリー 「A」特に関連のある文献ではなく、一般的技術水準を示すもの 「E」国際出願日前の出願または特許であるが、国際出願日以後に公表されたもの 「L」優先権主張に疑義を提起する文献又は他の文献の発行日若しくは他の特別な理由を確立するために引用する文献 (理由を付す) 「O」口頭による開示、使用、展示等に言及する文献 「P」国際出願日前で、かつ優先権の主張の基礎となる出願		の日の後に公表された文献 「T」国際出願日又は優先日後に公表された文献であって出願と矛盾するものではなく、発明の原理又は理論の理解のために引用するもの 「X」特に関連のある文献であって、当該文献のみで発明の新規性又は進歩性がないと考えられるもの 「Y」特に関連のある文献であって、当該文献と他の1以上の文献との、当業者にとって自明である組合せによって進歩性がないと考えられるもの 「&」同一パテントファミリー文献									
国際調査を完了した日 11.12.2006		国際調査報告の発送日 19.12.2006									
国際調査機関の名称及びあて先 日本国特許庁 (ISA/JP) 郵便番号100-8915 東京都千代田区霞が関三丁目4番3号		特許庁審査官 (権限のある職員) 鳥居 稔 電話番号 03-3581-1101 内線 3545	5B 8841								

国際調査報告		国際出願番号 PCT/JP2006/318713
C (続き) . 関連すると認められる文献		
引用文献の カテゴリー*	引用文献名 及び一部の箇所が関連するときは、その関連する箇所の表示	関連する 請求の範囲の番号
A	I-SVD :. A New Singular Value. Decomposition Algorithm. With a High Relative Accuracy. Y. Nakamura & M. Iwasaki, Kyoto Univ. Japan. GAMM2004 200407 <URL:www.math.tu-berlin.de/~kressner/GAMM04/files/nakamura.pdf > [retrieved on 20061211]	1-23
A	高田雅美, 岩崎雅史, 木村欣司, 中村佳正, M. TAKATA, M. IWASAKI, K. KIMURA, YOSHIMASA NAKAMURA 高精度特異値計算ルーチンの開発とその性能評価 Implementation and Its Evaluations of Routine for Computing Singular Values with High Accuracy 情報処理学会論文誌 Vol. 46 No. SIG12(ACS11) 20050815, Pages: 299-311 [CSDB] CS-NG-2006-00063-020	1-23
A	J P 09-212489 A (富士通株式会社) 1997.08.15 (ファミリーなし)	1-23
PA	WO 2005/119507 A (独立行政法人科学技術振興機構) 2005.12.15	1-23

フロントページの続き

(81)指定国 AP(BW, GH, GM, KE, LS, MW, MZ, NA, SD, SL, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), EA(AM, AZ, BY, KG, KZ, MD, RU, TJ, TM), EP(AT, BE, BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HU, IE, IS, IT, LT, LU, LV, MC, NL, PL, PT, RO, SE, SI, SK, TR), OA(BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, ML, MR, NE, SN, TD, TG), AE, AG, AL, AM, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BR, BW, BY, BZ, CA, CH, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DK, DM, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, HN, HR, HU, ID, IL, IN, IS, JP, KE, KG, KM, KN, KP, KR, KZ, LA, LC, LK, LR, LS, LT, LU, LV, LY, MA, MD, MG, MK, MN, MW, MX, MY, MZ, NA, NG, NI, NO, NZ, OM, PG, PH, PL, PT, RO, RS, RU, SC, SD, SE, SG, SK, SL, SM, SV, SY, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US, UZ, VC, VN, ZA, ZM, ZW

特許法第30条第1項適用申請有り

(72)発明者 阪野 真也

京都府京都市左京区吉田本町 国立大学法人京都大学大学院情報学研究科内

(72)発明者 高田 雅美

京都府京都市左京区吉田本町 国立大学法人京都大学大学院情報学研究科内

Fターム(参考) 5B056 AA04 BB42

(注)この公表は、国際事務局(WIPO)により国際公開された公報を基に作成したものである。なおこの公表に係る日本語特許出願(日本語実用新案登録出願)の国際公開の効果は、特許法第184条の10第1項(実用新案法第48条の13第2項)により生ずるものであり、本掲載とは関係ありません。