

(19) 日本国特許庁(JP)

(12) 特許公報(B2)

(11) 特許番号

特許第6261014号
(P6261014)

(45) 発行日 平成30年1月17日(2018.1.17)

(24) 登録日 平成29年12月22日(2017.12.22)

(51) Int.Cl. F I
G06F 7/58 (2006.01) G06F 7/58 620

請求項の数 7 (全 28 頁)

| | | | |
|---------------|------------------------------|-----------|--|
| (21) 出願番号 | 特願2015-530833 (P2015-530833) | (73) 特許権者 | 504160781 国立大学法人金沢大学 石川県金沢市角間町ヌ7番地 |
| (86) (22) 出願日 | 平成26年7月30日 (2014.7.30) | (74) 代理人 | 100141519 弁理士 梶田 邦之 |
| (86) 国際出願番号 | PCT/JP2014/070000 | (72) 発明者 | 藤崎 礼志 石川県金沢市角間町ヌ7番地 国立大学法人金沢大学内 |
| (87) 国際公開番号 | W02015/019907 | 審査官 | 田川 泰宏 |
| (87) 国際公開日 | 平成27年2月12日 (2015.2.12) | | |
| 審査請求日 | 平成29年6月26日 (2017.6.26) | | |
| (31) 優先権主張番号 | 特願2013-166128 (P2013-166128) | | |
| (32) 優先日 | 平成25年8月9日 (2013.8.9) | | |
| (33) 優先権主張国 | 日本国 (JP) | | |

最終頁に続く

(54) 【発明の名称】 符号生成装置、符号生成方法、通信装置、解析装置

(57) 【特許請求の範囲】

【請求項1】

長さ $2^{(2p+1)}$ のde Bruijn系列に含まれるCR系列を生成する符号生成装置であって、
 複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するオイラーグラフ生成部と、

pを取得する取得部と、

前記オイラーグラフ生成部によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、前記取得部によって取得されたpに対するCRグラフの原型を生成する第1CRグラフ生成部と、

前記第1CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフの原型を用いて、CRグラフを生成する第2CRグラフ生成部と、

前記第2CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフからCR系列を生成するCR系列生成部と、

を備えることを特徴とする符号生成装置。

【請求項2】

前記オイラーグラフ生成部は、入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含む複数の頂点を有するように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成し、

前記第1CRグラフ生成部は、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入

次数と出次数が共に 2 となる複数の第 4 頂点と、入次数と出次数が共に 1 となる第 5 頂点とを含む複数の頂点を有するように、C R グラフの原型を生成することを特徴とする請求項 1 に記載の符号生成装置。

【請求項 3】

前記第 2 C R グラフ生成部は、前記第 1 C R グラフ生成部によって生成された C R グラフの原型に含まれる少なくとも 1 つの中立頂点を含む複数の頂点のそれぞれを 2 つの頂点に分裂させることによって、C R グラフを生成することを特徴とする請求項 1 に記載の符号生成装置。

【請求項 4】

前記 C R 系列生成部は、前記 p が素数でない場合、前記第 2 C R グラフ生成部によって生成された C R グラフから得られるオイラー回路のうち、正規括弧構造もしくは平衡括弧構造で表されるオイラー回路を選別して C R 系列を生成することを特徴とする請求項 1 に記載の符号生成装置。

【請求項 5】

長さ $2^{(2p+1)}$ の de Bruijn 系列に含まれる CR 系列を コンピュータに生成させる 符号生成方法であって、

複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれた de Bruijn グラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するステップと、

p を決定するステップと、

生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、決定された p に対する CR グラフの原型を生成するステップと、

生成された CR グラフの原型を用いて、CR グラフを生成するステップと、

生成された CR グラフから CR 系列を生成するステップと、

を含むことを特徴とする符号生成方法。

【請求項 6】

長さ $2^{(2p+1)}$ の de Bruijn 系列に含まれる C R 系列を用いて通信を実行する通信装置であって、

複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれた de Bruijn グラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するオイラーグラフ生成部と、

p を取得する取得部と、

前記オイラーグラフ生成部によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、前記取得部によって取得された p に対する C R グラフの原型を生成する第 1 C R グラフ生成部と、

前記第 1 C R グラフ生成部によって生成された C R グラフの原型を用いて、C R グラフを生成する第 2 C R グラフ生成部と、

前記第 2 C R グラフ生成部によって生成された C R グラフから C R 系列を生成する C R 系列生成部と、

前記 C R 系列生成部によって生成された C R 系列を用いて、送信すべき信号に対して符号化処理を実施する符号化部と、

前記符号化部によって符号化された信号を送信する送信部と、
を備えることを特徴とする通信装置。

【請求項 7】

長さ $2^{(2p+1)}$ の de Bruijn 系列に含まれる C R 系列を用いて塩基配列を解析する解析装置であって、

複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれた de Bruijn グラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するオイラーグラフ生成部と、

p を取得する取得部と、

10

20

30

40

50

前記オイラーグラフ生成部によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、前記取得部によって取得された p に対するCRグラフの原型を生成する第1CRグラフ生成部と、

前記第1CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフの原型を用いて、CRグラフを生成する第2CRグラフ生成部と、

前記第2CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフからCR系列を生成するCR系列生成部と、

前記CR系列生成部によって生成されたCR系列を用いて、塩基配列を分析する分析部と、

を備えることを特徴とする解析装置。

10

【発明の詳細な説明】

【技術分野】

【0001】

本発明は、符号生成技術に関する。

【背景技術】

【0002】

近年、電子計算機をインフラ基盤とする産業社会において、最大周期列の応用範囲は拡大しつつある。特に、遺伝子解析系、暗号系、通信系、計算機科学系、経済・ファイナンス系など、さまざまな分野に応用されている。

20

【0003】

従来、最大周期列を生成するために、線形フィードバックシフトレジスタ(linear feedback shift register)が通常用いられていた。線形フィードバックシフトレジスタから生成される最大周期系列はM系列と呼ばれ、擬似乱数系列として最も良く知られている。また、非線形フィードバックシフトレジスタから生成される最大周期系列の典型例であるde Bruijn系列は、M系列よりも遥かに多くの最大周期系列が存在する。

【0004】

非特許文献1では、長さ 2^n のde Bruijn系列に対するCR(complement reverse)系列を定義し、 n が偶数のときにはそれが存在しないことを指摘した。さらに、 $n=3, 5$ の場合にその存在例を示した。

30

【先行技術文献】

【非特許文献】

【0005】

【非特許文献1】H. Fredricksen, "A Survey of Full Length Nonlinear Shift Register Cycle Algorithm", SIAM Review, vol.24, pp. 195~221, 1982.

【発明の概要】

【発明が解決しようとする課題】

【0006】

しかしながら、従来の技術では、 $n=3, 5$ の場合について例示しているものの、 n が一般の奇数の場合にまで拡張してCR系列が存在することまでは示せなかった。そのため、 n が7以上の奇数となるような、比較的長い系列長を有するCR系列を生成するためのアルゴリズムが確立できず、極めて非効率な方法でしか、長い系列長を有するCR系列が生成できなかった。このような状況であったため、RNAのde novoシーケンス解析やDNAリシーケンシング、あるいは、通信技術への応用には限界があった。

40

【0007】

本発明はかかる課題に鑑みてなされたものであり、その目的は、長い系列長を有するCR系列を効率的に生成する符号生成装置、符号生成方法、通信装置、解析装置を提供することにある。

【課題を解決するための手段】

【0008】

50

本発明のある態様は、符号生成装置に関する。この符号生成装置は、長さ $2^{(2p+1)}$ のde Bruijn系列に含まれるCR系列を生成する符号生成装置である。また、この符号生成装置は、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含む複数の頂点を有する有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するオイラーグラフ生成部と、 p を取得する取得部と、オイラーグラフ生成部によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含む複数の頂点を有するように、取得部によって取得された p に対するCRグラフの原型を生成する第1CRグラフ生成部と、第1CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフの原型を用いて、CRグラフを生成する第2CRグラフ生成部と、第2CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフからCR系列を生成するCR系列生成部と、を備える。また、この符号生成装置において、第2CRグラフ生成部は、第1CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフの原型に含まれる少なくとも1つの中立頂点を含む複数の頂点のそれぞれを2つの頂点に分裂させることによって、CRグラフを生成してもよい。また、この符号生成装置において、CR系列生成部は、 p が素数でない場合、第2CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフから得られるオイラー回路のうち、正規括弧構造もしくは平衡括弧構造で表されるオイラー回路を選別してCR系列を生成することができる。

【0009】

このような態様によると、 p を自由に選択した上で、それぞれ特性の異なる3つのグラフを段階的に生成することによって、効率的に、長い系列長を有するCR系列を生成できる。このアルゴリズムによると、CRグラフ上のオイラー回路をCRグラフに一意に変換できる。

【0010】

本発明の別の態様は、符号生成方法である。この符号生成方法は、長さ $2^{(2p+1)}$ のde Bruijn系列に含まれるCR系列をコンピュータに生成させる符号生成方法であって、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含む複数の頂点を有する有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するステップと、 p を決定するステップと、生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含む複数の頂点を有するように、決定された p に対するCRグラフの原型を生成するステップと、生成されたCRグラフの原型に含まれる少なくとも1つの中立頂点を含む複数の頂点のそれぞれを2つの頂点に分裂させることによって、CRグラフを生成するステップと、生成されたCRグラフからCR系列を生成するステップと、を含む。

【0011】

本発明の別の態様は、通信装置である。この通信装置は、長さ $2^{(2p+1)}$ のde Bruijn系列に含まれるCR系列を生成する。また、この通信装置は、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含む複数の頂点を有する有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するオイラーグラフ生成部と、 p を取得する取得部と、オイラーグラフ生成部によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含む複数の頂点を有するように、取得部によって取得された p に対するCRグラフの原型を生成する第1CRグラフ生成部と、第1CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフの原型を用いて、CRグラフを生成する第2CRグラフ生成部と、第2CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフからCR系列を生成するCR系列生成部と、CR系列生成部によって生成されたCR系列を用いて、送信すべき信号に対して符号化処理を実施する符号化部と、符号化部によって符号化された信号を送信する

送信部と、を備える。

【0012】

本発明の別の態様は、解析装置である。この解析装置は、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含む複数の頂点を有する有向オイラーグラフ G_n^0 を生成するオイラーグラフ生成部と、 p を取得する取得部と、オイラーグラフ生成部によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含む複数の頂点を有するように、取得部によって取得された p に対するCRグラフの原型を生成する第1CRグラフ生成部と、第1CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフの原型を用いて、CRグラフを生成する第2CRグラフ生成部と、第2CRグラフ生成部によって生成されたCRグラフからCR系列を生成するCR系列生成部と、CR系列生成部によって生成されたCR系列を用いて、塩基配列を分析する分析部とを備える。

10

【0013】

なお、以上の構成要素の任意の組み合わせ、本発明の表現を方法、装置、システム、コンピュータプログラムなどの間で変換したものもまた、本発明の態様として有効である。

【発明の効果】

【0014】

本発明によると、長い系列長を有するCR系列を効率的に生成できる。

20

【発明を実施するための形態】

【0015】

以下においては、まず本発明の理論を説明した上で、実施例を用いて説明していくものとする。

【0016】

<理論>

1. de Bruijn 系列

本発明においては、離散化マルコフ変換に基づく最大周期列の典型例である、de Bruijn 系列に注目している。de Bruijn系列は、離散化マルコフ変換に関して定義することができる(参考文献1参照)。しかしながら、ここでは、次の様に、離散化マルコフ変換に無関係に定義するものとする。

30

【0017】

ここで、二進語は有限二値系列である。また、長さ k の語は k -語と呼ばれる。長さ k の二進サイクルは、循環順序に関する、二進 k -語の列 $a_1a_2 \dots a_k$ の列である。サイクル $a_1a_2 \dots a_k$ においては、 a_1 からはじまり、 a_k へと続く。ここで、 $a_2 \dots a_k a_1$ 、 $a_k a_1 \dots a_{k-1}$ は全て $a_1a_2 \dots a_k$ と同じ k 個のサイクルである。

以下、列 $X=X_0X_1X_2 \dots X_{N-1}$ を $X=(X_i) \{i=0,1,\dots,N-1\}$ と略記する。

【0018】

二つの列 $X=(X_i) \{i=0,1,\dots,N-1\}$ と $Y=(Y_i) \{i=0,1,\dots,N-1\}$ が同値であると言われるのは、 X と Y が同じサイクルであるときであり、これを記号

40

<式A>

$$X \cong Y$$

で表す。長さ 2^n の二進完全サイクルは二進 2^n -語のサイクルであって、二進 n -語の、 2^n 個の可能な順序列が全て異なるものとなる。なお、任意の二進 n -語は、完全サイクルに丁度一回現れる。

【0019】

例1 長さ 2^n の完全サイクルの例を与える。

$n=1$, 01、

$n=2$, 0011、

50

$n = 3$ 、00010111、00011101。

【0020】

なお、次の定理のために、完全サイクルは、de Bruijn 系列とも呼ばれる。

定理1 (参考文献2、3参照)

各正の整数 n に対して、長さ $2n$ の完全サイクルは、丁度 $2^{2^{(n-1)}-n}$ 個存在する。なお、 x^n は、 x の n 乗を表すものとする。

【0021】

2. 既知の結果

本発明の理論を検討するまえに、まず、既知の結果について以下に述べる。

【0022】

まず、 $N = 2^n$ ($n \geq 1$) と置く。また、 $a \in \{0, 1\}$ に対して、 $\sim a$ を用いて、 a の補数を表す、即ち、 $\sim 0 = 1$ および $\sim 1 = 0$ となる。ここで、 $X = (X_i)_{i=0,1,\dots,N-1}$ は長さ $N = 2^n$ の de Bruijn 系列であるとする。

【0023】

ここで、系列の時間反転を扱うために、次を導入する。

定義1: $\{0, 1\}$ 上の系列 $X = (X_i)_{i=0,1,\dots,N-1}$ に対して、 X の反転 $\text{r}X$ は $\text{r}X = (X_i)_{i=N-1,\dots,0}$ で定義される。

【0024】

観察1 (参考文献4参照)

X は完全サイクルであるので、 $\sim X = (\sim X_i)_{i=0,1,\dots,N-1}$ もまた完全サイクル、すなわち、de Bruijn 系列である。同様に、 $\text{r}X$ もまた de Bruijn 系列である。

【0025】

補題1 (参考文献5参照) $n \geq 3$ に対して、

<式B>

$$X \cong \sim X$$

となる。補題2 (参考文献6参照) $n \geq 3$ に対して、

<式C>

$$X \cong \text{r}X$$

となる。

【0026】

定義により、 $\text{r}(\text{r}X) = X$ 、 $\sim(\sim X) = X$ 、および $\text{r}\sim X = \sim(\text{r}X)$ 。

<式D>

$$X \cong \text{r}\sim X$$

、または、

<式E>

$$\sim X \cong \text{r}X$$

ならば、 X は CR (complement reverse) 系列と呼ばれる。定義により、 X が CR 系列であれば、 $\sim X$ と $\text{r}X$ も CR 系列であることとなる。

【0027】

補題3 (参考文献4参照) 偶数 $n \geq 4$ に対して、

<式F>

$$X \cong \text{r}\sim X$$

となる。

【0028】

一方、参考文献4において、 $n = 5$ に対して、

10

20

30

40

50

< 式 G >

$$X \cong \sim X$$

が起こると指摘された。実際、 $n = 5$ に対して、32 対のCR 系列が存在する。その様なCR 系列の一例が与えられた:

例2 (参考文献 4 参照) $X = 11111001000101011101100000110100$ は

< 式 H >

$$\sim X \cong \sim X$$

10

を満たす。

【 0 0 2 9 】

参考文献 4 において、次の問題がFredricksen により与えられた。

「 $n (\geq 3)$ が偶数であるとき常にCR 系列が存在することを示せ。」

この問題はしばしば議論され、特に、参考文献 6 において、CR 系列の特徴付けが与えられた。

【 0 0 3 0 】

補題4 (参考文献 6) $Y = (\sim Y_i) \{i=0,1, \dots, N-1\}$ は、必ずしもde Bruijn 系列でない、 $\{0, 1\}$ 上の系列であるとする。系列Y がCR 系列であるのは、 N が偶数、かつ、ある $N/2$ -語w に対して

20

< 式 I >

$$Y \cong \sim ww$$

のとき、またそのときに限る。

なお、語u とv に対して、uvはuとvの接続を表す。しかしながら、残念であるが、発明者の知る限り、上記Fredricksen の問題は未解決である。本発明では、この問題を解決する。

【 0 0 3 1 】

3 . 準備: CR グラフの構成

まず、 $G_n = (V_n, A_n)$ は、頂点集合 $V_n = \{0, 1\}^{n-1}$ および (有向) 辺集合 $A_n = \{0, 1\}^n$ を有するde Bruijn グラフであるとする。有向辺 $a_1 a_2 \dots a_n$ A_n は、 $a_1 a_2 \dots a_n$ a_{n-1} から $a_2 a_3 \dots a_n$ に向かうと定義すれば、オイラーグラフであるde Bruijn グラフが容易に得られる。図 1 にnが2 の場合のde Bruijn グラフ G_2 、図 2 にnが3 の場合のde Bruijn グラフ G_3 をそれぞれ示す。

30

ここで、Fredricksen の問題を解決するために、奇数 $n (\geq 3)$ に対して、de Bruijn グラフに随伴するオイラー・グラフを構成する。得られたグラフのオイラー回路は長さ 2^n のde Bruijn 系列に属するCR 系列を生成するので、結果として得られるオイラー・グラフはCR グラフと呼ばれる。その上、CR グラフの集合は、de Bruijn 系列に属する全てのCR 系列を提供する。

【 0 0 3 2 】

さらに、 $n = 2m + 1 (m \geq 1)$ と置く。 $n - 1 = 2m$ は偶数であるので、補題4 により、頂点集合 $V_{2m+1} = \{0, 1\}^{2m}$ は、 2^m 個存在する、長さ $2m$ のCR 系列を全て含む。その様な長さ $2m$ のCR 系列を問題の長さ 2^n のCR 系列と区別するために、その様なCR 系列をCR 頂点またはCR $2m$ -語と言う。

40

【 0 0 3 3 】

また、 $V_n^{CR} (\subseteq V_n)$ を用いて、CR 頂点全体の集合を表す。CR $2m$ -語は $\sim ww$ である。ここで、 $w \in \{0, 1\}^{2m}$ である。 V_n^{CR} に属する任意の $\sim uu$ と $\sim vv$ に対して、 $\sim uu \sim vv$ となるためには

$$u_1 2^{m-1} + u_2 2^{m-2} + \dots + u_m \quad v_1 2^{m-1} + v_2 2^{m-2} + \dots + v_m$$

のときであると定めると、 V_n^{CR} の上に全順序関係 が与えられ、 $\sim uu$ と $\sim vv$ の順序が一

50

意に定まる。ここで、 $u = u_1u_2 \dots u_m$ と $v = v_1v_2 \dots v_m$ は $\{0, 1\}^m$ に属する。これにより、 V_n^{CR} に属する全ての元に番号を付ける： $v^{(0)} < v^{(1)} < \dots < v^{(2^m-1)}$ 。CR 頂点の概念を用いて、補題4の精密化を次の様に得る。これは、CR 系列の構成において、決定的に重要な役割を果たす。

【 0 0 3 4 】

補題5

< 式 J >

$$X \cong \tilde{w}w$$

は、長さ 2^{2m+1} の de Bruijn 系列に属する CR 系列であるとする。

ここで $w = w_1w_2 \dots w_{2^{2m}}$ $\{0, 1\}^{2^{2m}}$ 。このとき、一意の CR 頂点 $v \in V_{2m+1}^{CR}$ が存在して、

$$v = \tilde{r} \sim (w_1w_2 \dots w_m) w_1w_2 \dots w_m \\ = w_{2^{2m-m+1}} \dots w_{2^{2m-1}} w_{2^{2m}} \tilde{r} \sim (w_{2^{2m-m+1}} \dots w_{2^{2m-1}} w_{2^{2m}}) \quad (1)$$

を満たす。さらに、一意の v は $0v1$ と $1v0$ の形式で X に二度現れる。一方、他の CR 頂点 $v \in V_{2m+1}^{CR}$ は $1u1$ または $0u0$ の形式で w に一度だけ現れる。

【 0 0 3 5 】

CR グラフの構成を進めるために、次を導入する。

定義2 $\{0, 1\}$ 上の系列 $Y = (Y_i) \{i=0, 1, \dots, N-1\}$ の重み $W(Y)$ は、 N 個の Y_i の間の非零記数の数であると定義される。

すなわち、

< 式 K >

$$W(Y) = \sum_{i=0}^{N-1} Y_i$$

となる。

【 0 0 3 6 】

これを用いて、 V_n を互いに素な三つの部分集合

$$V_n^- = \{v \in V_n : W(v) < m\},$$

$$V_n^0 = \{v \in V_n : W(v) = m\}, \text{ および}$$

$$V_n^+ = \{v \in V_n : W(v) > m\}$$

に分割する。 30

【 0 0 3 7 】

$v \in V_n^{CR}$ に対して $W(v) = m$ なので、 $V_n^{CR} = V_n^0$ となるのに留意する。ここで、各 $v^{(i)} \in V_n^{CR} (i = 0, 1, \dots, 2^m - 1)$ に対して、de Bruijn グラフ G_n に同伴する CR グラフ $H_{v^{(i)}}$ を次のように構成する。 $i + j = 2^m$ を満たす、 V_n^{CR} に属する各対 $v^{(i)}$ と $v^{(j)}$ に対して、 $\sim v^{(i)} = v^{(j)}$ が成立するので、 $i + j = 2^m$ を満たす $H_{v^{(i)}}$ と $H_{v^{(j)}}$ はグラフ同型であることが理解される。

【 0 0 3 8 】

ステップ1 有向グラフ G_n^0 の構成

まず初めに、de Bruijn グラフ G_n に同伴する有向グラフ G_n^0 を次のように構成する。 40

【 0 0 3 9 】

まず、 $W_n = \{ \} \setminus V_n^+$ と置く。 W_n に属する形式 $u = a_1a_2 \dots a_{n-1}$ と $v = a_2a_3 \dots a_n$ の二つの頂点に対して、二進 n -語 $a_1a_2 \dots a_n$ は、 u から v への有向辺として定義できる。結果として得られる G_n の部分グラフはオイラー・グラフでない。その理由は、 G_n における次の二つの型の有向辺が与えられていないからである。

【 0 0 4 0 】

$u1$: ここで $u \in V_n^0$ は $u = 0v$ の形式である; および

$1u$: ここで $u \in V_n^0$ は $u = v0$ の形式である。

これら二つの型以外、 $w \in W \setminus \{ \}$ に対して、 G_n における全ての有向辺 $0w, 1w, w0, \text{ および } w1$ は、結果として得られる部分グラフに備わっている。部分グラフをオイ 50

ラー・グラフにするために、これら二つの型の不在の有向辺に対応して、 から出る、
または へ向かう有向辺を次の様に加える。

【 0 0 4 1 】

G_n における全てのその様な有向辺:

$u1$ (ここで $u = 0v \quad V_n^0$)、および $1u$ (ここで $u = v0 \quad V_n^0$) に対応して、
全ての $u = 0v \quad V_n^0$ に対して u から への有向辺 u を加える; および
全ての $u = v0 \quad V_n^0$ に対して から u への有向辺 u を加える。

【 0 0 4 2 】

これにより、連結グラフを得ることができ、それを G_n^0 で表す。上記構成により、 は
等しい入次数と出次数、

< 式 A B >

$$\binom{2m-1}{m-1}$$

を持つこととなる。一方、 $V_n \setminus V_n^+$ に属するすべての頂点は等しい入次数と出次数、2
を持つ。ここで、頂点の入次数はそれに隣接する頂点の数であり、および頂点の出次数
はそれが隣接する頂点の数である。ゆえに、結果として得られる有向グラフ G_n^0 はオイラ
ー・グラフとなる。

【 0 0 4 3 】

ステップ2 CR グラフの原型の構成

次に、有向グラフ G_n^0 を変形して、 CR グラフの原型を得る。そのために、 V_n^0 を互い
に素な以下の四つの部分集合

$$\begin{aligned} V_n^{00} &= \{v \in V_n^0 : v = 0w0, w \in \{0, 1\}^{2(m-1)}\}, \\ V_n^{01} &= \{v \in V_n^0 : v = 0w1, w \in \{0, 1\}^{2(m-1)}\}, \\ V_n^{10} &= \{v \in V_n^0 : v = 1w0, w \in \{0, 1\}^{2(m-1)}\}, \text{ および} \\ V_n^{11} &= \{v \in V_n^0 : v = 1w1, w \in \{0, 1\}^{2(m-1)}\} \end{aligned}$$

に分割する。

【 0 0 4 4 】

$m = 1$ の場合、 $w \in \{0, 1\}^0$ は $w =$ を意味し、語 u と v に対して $u \quad v = uv$ と約束
する。ここで は、空語を表す。 $V_n^{CR} \quad V_n^{01} \quad V_n^{10}$ であるのに再度注意する。特に、 m
 $= 1$ に対して、 $V_n^{CR} = V_n^{01} \quad V_n^{10}$ となり、および V_n^{00} と V_n^{11} は空集合となる。

【 0 0 4 5 】

構成を進めるために、初等整数論のいくつかの概念を用いることとする。まず、 $m \geq 2$
に対して、 $e_p(m)$ は、 m の素因数のべきの積としての (一意の) 表示に現れる素数 p が
有する指数として定義されるとする。即ち、 $m = \prod_p p^{e_p(m)}$ 。 $d(m)$ を用いて、 m の約数
の数を表すとすると、 $d(m) = \prod_p (e_p(m) + 1)$ を得る。各 $m \geq 2$ に対して、 V_n^{CR} に属する次
の頂点は、CR 系列の構成において特に本質的な役割を果たす。語 w に対して、 w^k を用い
て、 w の k 個の複製の接続、即ち、図 3 に示すような態様を表す。

整数 a と b に対して、 a が b の約数であるとき、 $a|b$ と書く。 $[x]$ を用いて、 x を
超えない最大の整数を表す。 S を用いて、 $\{0, 1\}^{2m}$ の上のシフト変換を表す。即ち、

$$\begin{aligned} v &= v_1 v_2 \dots v_{2m} \in \{0, 1\}^{2m} \text{ に対して} \\ S(v_1, v_2, \dots, v_{2m-1}, v_{2m}) &= (v_2, v_3, \dots, v_{2m}, v_1). \end{aligned}$$

【 0 0 4 6 】

定義3 $m \geq 2$ に対して、 V_n^{CR} に属する形式 $v^{(i(k))} = (1^k 0^k)^{m/k}$ および $\sim v^{(i(k))}$ の $2(d(m)-1)$
個の頂点は中立頂点と呼ばれる。ここで $k \geq 2$ 、 $k|m$ および

< 式 L >

$$i(k) = \frac{2^{2k \binom{m}{k} + k} - 2^k}{2^k + 1}$$

である。

10

20

30

40

50

【0047】

$V_n^{CR,v}$ を用いて、 V_n^{CR} に属する中立頂点全体の集合を表す。各 $j = 1, 2, \dots, k-1$ に対して、 $S^j(v^{(i(k))})$ は V_n^{11} に属する。 V_n^{11} に属するその様な頂点もまた中立と呼ばれる。 $V_n^{11,v}$ を用いて、 V_n^{11} に属する中立頂点全体の集合を表す。 V_n^{00} に属する中立頂点全体の集合 $V_n^{00,v}$ が相補的に定義される。

【0048】

構成に戻る。 $V_n^{CR} \setminus V_n^{11}$ に属する中立頂点を除いたすべての頂点 $v \in V_n^0$ を二つの頂点、有向辺 $0v$ と $v0$ を有する v と、および有向辺 $1v+$ と $v+0$ を有する $v+$ とに分裂する。これを図式で示すと図4、図5に図示した様になる。図4は、頂点 v に対して、 $0v$ と $1v+$ が入力され、 $v0$ と $v1+$ が出力されることを示している。図5は、図4の v を2つの頂点 v と $v+$ に分裂した場合を示している。

10

【0049】

このとき、中立頂点以外、すべての $v \in V_n^0$ に対して、複製された頂点 $v+$ は単一のループ $1^i v+1^j$ に現れる。ここで $0 \leq i+j \leq m$ である。その様な単一ループは全て削除できる。

【0050】

一方、 V_n^{CR} に属する中立頂点の各対 $v^{(i(k))}$ と $\sim v^{(i(k))}$ に対して、 $\sim v^{(i(k))}$ から $v^{(i(k))}$ への有向辺 $\sim v^{(i(k))} 0^k v^{(i(k))}$ を得る。ここで $k|m$ であり、 $i(k)$ は定義3で用いた。 $k|m$ を満たす各 k に対して、 $\sim v^{(i(k))}$ から $v^{(i(k))}$ への有向辺を削除する。次に、 $\sim v^{(i(k))}$ から $v^{(i(k))}$ への有向辺を加え、それに $v^{(i(k))}$ とラベル付けする。一方、 $\sim v^{(i(k))}$ から $\sim v^{(i(k))}$ への有向辺を加え、それに $\sim v^{(i(k))}$ とラベル付けする。

20

【0051】

以上により、頂点集合 $\{v\} \cup (V_n^0 \setminus V_n^{00,v}) \cup V_n^-$ を有する連結グラフを得る。これを G_n^- で表す。上記構成により、 G_n^- は等しい入次数と出次数、 $d(m)-1$ を持つ。また、 $V_n^{CR,v} \cup V_n^{11,v} \cup V_n^-$ に属するすべての頂点は等しい入次数と出次数、2を持つ。さらに、 $V_n^0 \setminus (V_n^{CR,v} \cup V_n^{11,v} \cup V_n^{00,v})$ に属するすべての頂点は等しい入次数と出次数、1を持つ。ゆえに、結果として得られる有向グラフ G_n^- はオイラー・グラフである。それをCRグラフの原型と呼ぶ。

【0052】

ステップ3 CRグラフの構成

30

ここで、有向グラフ G_n^- を変形することによって、CRグラフを構成する段階にある。以下、 $m(2)$ は素数であると仮定する。この仮定を表示するために、本実施例の残りに渡って m を p で置き換える。ここで、この仮定の下で

$$V_n^{CR,v} = \{v^{(i(p))} = 1^p 0^p, \sim v^{(i(p))} = 0^p 1^p\}$$

を得ることに注意する。

【0053】

まず初めに、頂点 v および、 $v^{(i(p))}$ または $\sim v^{(i(p))}$ (ここで $v^{(i(p))} \in V_n^{CR,v}$)、とラベル付けされた、その全部で四つの有向辺を $\sim v^{(i(p))}$ から $v^{(i(p))}$ への二つの有向辺で置き換え、各々 $\sim v^{(i(p))} v^{(i(p))}$ と同じラベルを付ける。

40

【0054】

G_n^- における $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ を選び、固定する。 $v^{(i)}$ が中立頂点でないならば、即ち、 $v^{(i)} \in V_n^{CR} \setminus V_n^{CR,v}$ ならば、ループである $v^{(i)}$ から $v^{(i)}$ への有向辺を加え、それに $v^{(i)}$ とラベル付けする。 $v^{(i)}$ が中立頂点であるならば、即ち、 $v^{(i)} = v^{(i(p))}$ または $v^{(i)} = \sim v^{(i(p))}$ ならば、何もしない。なぜならば、 $\sim v^{(i(k))} v^{(i(k))}$ とラベル付けされた二つの有向辺が構成中のグラフに既に備わっているからである。この二つの有向辺は、 $v^{(i)} = v^{(i(p))}$ のとき $\sim v^{(i)}$ から $v^{(i)}$ へ向かい、または $v^{(i)} = \sim v^{(i(p))}$ のとき $v^{(i)}$ から $\sim v^{(i)}$ へ向かう。

【0055】

ケースi)

$v^{(i)} \in V_n^{CR} \setminus V_n^{CR,v}$ ならば、 $V_n^{CR,v}$ に属する中立頂点 $v^{(i(p))}$ と $\sim v^{(i(p))}$ の両方

50

を、図4、図5で図示したのと同様に、各々二つの頂点に分裂すると、図6のように図示される。なお、図6および図7においては、アップバーを用いて補数を表現している。

【0056】

ケースii)

$v^{(i)}$ が中立頂点、すなわち、 $v^{(i)} = v^{(i(p))}$ または $v^{(i)} = \sim v^{(i(p))}$ であるならば、 $V_n^{CR,v}$ に属する中立頂点 $v^{(i(p))}$ と $\sim v^{(i(p))}$ の両方を、図7に図示されるように、各々二つの頂点に分裂する：

【0057】

結局、各 $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して、頂点集合 $(V_n^0 \setminus V_n^{00,v}) \cup V_n^- \cup V_n^{CR,v+}$ を有する連結グラフを得る。これを $H_{v(i)}$ で表す。ここで $V_n^{CR,v+} = \{v^{(i(p))}, \sim v^{(i(p))}\}$ である。全ての $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して頂点集合は同じであることに注意して、 $W_n^{CR} = (V_n^0 \setminus V_n^{00,v}) \cup V_n^- \cup V_n^{CR,v+}$ と書く。各 $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して、 $H_{v(i)}$ に属するすべての頂点は等しい入次数と出次数を持つ。したがって、結果として得られる有向グラフ $H_{v(i)}$ はオイラー・グラフである。 $H_{v(i)}$ におけるオイラー回路はCR系列を生成するので、これを $v^{(i)}$ に同伴するCRグラフと呼ぶ。 $B_{v(i)}$ を用いて、 $H_{v(i)}$ の有向辺全体の集合を表し、 $H_{v(i)} = (W_n^{CR}, B_{v(i)})$ と書く。

10

【0058】

この段階において、 2^p 個のCRグラフを得る。 $H_{v(i)}$ と $H_{\sim v(i)}$ がグラフ同型であることに注意するのは有益である。これを記号で、

<式M>

20

$$H_{v(i)} \cong H_{\sim v(i)}$$

と書く。実際、次の様に、写像の対 $\tau : W_n^{CR} \rightarrow W_n^{CR}$ と $\beta : B_{v(i)} \rightarrow B_{\sim v(i)}$ から成るグラフ同型写像 $(\tau, \beta) : H_{v(i)} \rightarrow H_{\sim v(i)}$ を得る。なお、写像 τ を、 $v \in W_n^{CR}$ に対して $\tau(v) = \tau v$ で定義する。

【0059】

また、写像 β を次の様に定義する。

頂点 $v \in W_n^{CR}$ から出る有向辺 va に対して $(va) = \tau(va) = a \tau v$ と定める。これは頂点 τv に入る有向辺である；および

30

頂点 $v \in W_n^{CR}$ に入る有向辺 av に対して $(av) = \tau(av) = \tau va$ と定める。これは頂点 τv から出る有向辺である。ここで $a \in \{0, 1\}$ 。

【0060】

特に、 $v^{(i)}$ はCR語であることを思い出して、 $(v^{(i)}) = \sim v^{(i)}$ を得る。 $(\tau, \beta) : H_{v(i)} \rightarrow H_{\sim v(i)}$ はグラフ同型写像である。

【0061】

4. 全てのCR系列の生成

本発明者は、参考文献7また特開2011-227632において、離散化された区分的単調増加マルコフ変換に基づく最大周期列を全て生成するような、有界単調真理値表アルゴリズムを与えている。最大周期列の総数を計算することなく、全ての最大周期列を生成するという意味において、提案されたアルゴリズムは効率的である。提案されたアルゴリズムは全てのde Bruijn系列を生成するのに応用することができる。しかしながら、残念であるが、CRグラフに基づいてCR系列を全て生成するために、有界単調真理値表アルゴリズムを応用することはできないであろう。というのは、CRグラフにおいて、提案されたアルゴリズムにおいて不可欠な役割を果たすための参考文献7で定義された拡大的サイクルを見つけることができないようであるからである。現状ではCR系列の総数を計算する必要がある。

40

【0062】

準備：既知のアルゴリズムによるCRグラフにおける全てのオイラー回路の探索

長さ $2^{2^{p+1}}$ のde Bruijn系列に含まれるCR系列の総数を計算するために、まず初めに

50

、行列木定理を思い出す。G は頂点 v_1, v_2, \dots, v_M を有し、かつ v_i から v_j へ導く t_{ij} 個の有向辺 ($i, j = 1, 2, \dots, M$) を有するグラフであるとする。行列 $A = (t_{ij}) \{i=1, \dots, M, j=1, \dots, M\}$ は隣接行列と呼ばれる。対角成分 d_1, d_2, \dots, d_M を有する対角行列を $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_M)$ と書いて、 $D = \text{diag}(\text{odeg}(v_1), \text{odeg}(v_2), \dots, \text{odeg}(v_M))$ とする。ここで $\text{odeg}(v)$ は頂点 v の出次数である。後のために、頂点 v の入次数を $\text{iddeg}(v)$ で表す。行列 $C = D - A$ はアドミタンス行列と呼ばれる。根 v_i を有する G を張る有向木は、 $M-1$ 個の有向辺 a_1, a_2, \dots, a_{M-1} の集合であって、 $j = 1, 2, \dots, M$ に対して、 v_j から v_i へのこれらの有向辺に沿う有向路が存在するものである。次の定理は行列木定理としてよく知られている。

【 0 0 6 3 】

10

定理2 (参考文献 8 参照)

根 v_i を有する G を張る有向木の総数はアドミタンス行列 $C = (c_{ij}) \{i=1, \dots, M, j=1, \dots, M\}$ における c_{ij} の余因子で与えられる。

上で与えられた有向グラフがオイラー・グラフであるならば、次の定理により、そのような G におけるオイラー回路の総数は、任意の頂点 v_i に対する c_{ij} の余因子で与えられることが示される。

【 0 0 6 4 】

定理3 (参考文献 9 参照)

$G = (V, A)$ は、すべての頂点 $v \in V$ に対して、 $\text{odeg}(v) = \text{iddeg}(v)$ を満たす有向グラフであるとする。また G は G を張る有向木であるとする。 r は G の根であるとし、また $a(v)$ は開始頂点 v を有する G の有向辺であるとする。 a_1 は開始頂点 r を有する任意の有向辺であるとする。このとき $v_0 a_1 v_1 \dots a_N v_N$ 、ここで $v_0 = r, v_i \in V$ および $a_i = v_{i-1} v_i \in A (i = 1, 2, \dots, N)$ 、がオイラー回路であるのは、それが次を満たす有向路であるときである。

20

i) どの有向辺も高々一度用いられる。

ii) 規則 i) に一致する唯一の選択でないならば、 $a(v)$ は a_1, a_2, \dots, a_N で用いられない。

iii) $ra_1 v_1 \dots a_N v_N$ は規則 i) によって続けられないときにだけ終了する。

【 0 0 6 5 】

各 CR グラフ $H_{v^{(i)}} (v^{(i)} \in V_n^{CR}, i = 0, 1, \dots, 2^p - 1)$ に対して、 $(v^{(i)})$ を用いて $H_{v^{(i)}}$ のアドミタンス行列の $(1, 1)$ 成分の余因子を表す。CR グラフはオイラー・グラフであるので、定理3 と行列木定理から、 $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路の総数は $(v^{(i)})$ で与えられる。定理3 と行列木定理により、 $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路を得るためにすべきことは、 $H_{v^{(i)}}$ を張る最小木を全て見付けることである。この目的のために、多種多様なアルゴリズムが提案されてきた。例えば、Kruskal のアルゴリズムはよく知られたアルゴリズムである。これは、重み付き連結グラフを張る最小木を見付けるための貪欲アルゴリズムである (参考文献 10 参照)。

30

【 0 0 6 6 】

ステップ 4 全CR 系列生成

以下、CR グラフ $H_{v^{(i)}}$ が与えられれば、直ちに $(v^{(i)})$ 個の $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路を全て得ると仮定してよい。 Y は $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路であるとする。オイラー回路 Y を $\{0, 1\}$ 上の系列と同一視する。 Y によって生成される周期列 Y を考える。

40

【 0 0 6 7 】

ケース i)

$v^{(i)}$ が V_n^{CR} に属する中立頂点でないならば、 Y は

$$v^{(i)} 0 \quad 0 \sim v^{(i(p))} \quad v^{(i(p))} 0 \quad 1 \sim v^{(i(p))} \quad v^{(i(p))} 1 \quad 0 v^{(i)} \quad v^{(i)} 0 \quad \dots \quad (2)$$

または

$$v^{(i)} 0 \quad 1 \sim v^{(i(p))} \quad v^{(i(p))} 1 \quad 0 \sim v^{(i(p))} \quad v^{(i(p))} 0 \quad 0 v^{(i)} \quad v^{(i)} 0 \quad \dots$$

の形式で書かれる。ここで、 \sim 、 \sim 、および \sim は、 Y の最初の $(2^{2^p} + 4p + 3)$ -語に

50

現れる{0、1}上の語である。これら両方を考えなければならないが、Y が形式(2)である前者だけを考える。というのは、Y からCR 系列を構成する手続きはいずれについても全く同じであるからである。以下、Y は形式(2)であるとする。

【0068】

Y の最初の(2^{2p} + 4p + 3)-語を

$$v^{(i)}0 \ 0\sim v^{(i(p))} \ r\sim(v^{(i(p))}0 \ 1\sim v^{(i(p))}) \ v^{(i(p))}1 \ 0v^{(i)}$$

に変換する。v^{(i(p))} と~v^{(i(p))} はCR 語であることに注意して、

$$v^{(i)}0 \ 0\sim v^{(i(p))} \ \sim v^{(i(p))}0 \ r\sim 1v^{(i(p))} \ v^{(i(p))}1 \ 0v^{(i)}$$

を得る。を消去した後、~v^{(i(p))} ~v^{(i(p))} とv^{(i(p))}v^{(i(p))} の各々を単一の語~v^{(i(p))} とv^{(i(p))} にそれぞれ置き換えて、

$$v^{(i)}0 \ 0\sim v^{(i(p))}0 \ r\sim 1v^{(i(p))}1 \ 0v^{(i)}$$

を得る。これをZ で表す。v^{(i(p))} と~v^{(i(p))} がCR 語であることに再び注意して、

$$Z \ r\sim Z = v^{(i)}0 \ 0\sim v^{(i(p))}0 \ r\sim 1v^{(i(p))}1 \ 0v^{(i)}v^{(i)}1 \ r\sim 0v^{(i(p))}0 \ 1\sim v^{(i(p))}1 \ r\sim 1v^{(i)}$$

を得る。循環順序において二度現れる各々の繰り返しv(i)v(i)を単一の語v(i) でそれぞれ置き換えることにより、長さ2^{2p+1} のCR 系列

$$X = v^{(i)}0 \ 0\sim v^{(i(p))}0 \ r\sim 1v^{(i(p))}1 \ 0v^{(i)} \ 1 \ r\sim 0v^{(i(p))}0 \ 1\sim v^{(i(p))}1 \ r\sim 1$$

を得る。

【0069】

構成により、語v⁽ⁱ⁾0 0~v^{(i(p))}0 1v^{(i(p))}1 0v⁽ⁱ⁾において、V_n^{11,v} V_n⁻に属するすべての頂点は丁度2 回現れる。一方、V_n⁰ \ V_n^{11,v}に属するすべての頂点は丁度1 回現れる。ゆえに、得られたCR 系列X は長さ2^{2p+1} のde Bruijn 系列に含まれる。

【0070】

ケースii)

v⁽ⁱ⁾ が中立頂点、すなわち、v⁽ⁱ⁾ = v^{(i(p))} またはv⁽ⁱ⁾ = ~v^{(i(p))} である場合を考える。これら両方の場合を考えなければならないが、v⁽ⁱ⁾ = v^{(i(p))} の場合だけを考える。というのは、Y からCR 系列を構成する手続きはいずれの場合についても全く同じであるからである。

【0071】

このとき、循環順序に関する同値関係を考慮して、Y は形式

$$\sim v^{(i(p))} \ v^{(i(p))}0 \ 0\sim v^{(i(p))} \ v^{(i(p))}1 \ 1\sim v^{(i(p))} \ v^{(i(p))}0 \ \dots$$

で一意に書かれるとしてよい。ここで、と はY の最初の(2^{2p} + 4p + 3)-語に現れる{0、1}上の語である。

【0072】

Y の最初の(2^{2p} + 4p + 3)-語を

$$\sim v^{(i(p))} \ v^{(i(p))}0 \ 0\sim v^{(i(p))} \ r\sim(v^{(i(p))}1 \ 1\sim v^{(i(p))})$$

に変換すれば、上のケースi) と全く同じ手続きを用いることにより、長さ2^{2p+1} のde Bruijn 系列に含まれるCR 系列X を得る。

【0073】

逆に、長さ2^{2p+1} のde Bruijn 系列に含まれるCR 系列X が与えられるとき、X または~Xにおいて、補題1 から、条件(1) を満たす一意のv⁽ⁱ⁾ V_{2m+1}^{CR}を見付けることができる。v⁽ⁱ⁾ が中立であるか否かに依存して、ケースi) またはii) の手続きを反転すれば、X または~X からH_{v(i)}に含まれるオイラー回路を得る。この対応は2 対1 かつ上への対応である。補題1 から、CR 系列X に対して、~X は相異なるCR 系列を与える。ゆえに、v⁽ⁱ⁾ V_{2m+1}^{CR}に対する上の手続きは、全体として、長さ2^{2p+1} のde Bruijn 系列に含まれるCR 系列の全ての対(X, ~X) を尽くす。

【0074】

補題1 と共に、オイラー回路とCR 系列の間のこの対応を用いて、長さ2^{2p+1} のde Bruijn 系列に含まれるCR 系列の総数は

<式N>

10

20

30

40

50

$$2 \sum_{i=0}^{2^p-1} \Delta^v(v(i))$$

で与えられる。これは、3 の最後で述べた $H_{v(i)}$ と $H_{\sim v(i)}$ の間のグラフ同型から、
< 式 O >

$$4 \sum_{i=0}^{2^p-1} \Delta^v(v(i))$$

に等しい。したがって、次を得る。

【 0 0 7 5 】

系1 任意の素数 p に対して、長さ 2^{2p+1} の de Bruijn 系列に含まれる CR 系列の総数は
< 式 P >

$$4 \sum_{i=0}^{2^p-1} \Delta^v(v(i))$$

となる。ここで $v(i) \in V_{2p+1}^{CR}$ 、である。次の簡単な下界を直ちに得る。

注1

< 式 Q >

$$4 \sum_{i=0}^{2^p-1} \Delta^v(v(i)) \geq 2^{p+1}$$

【 0 0 7 6 】

最後に、長さ 2^{2p+1} ($p \geq 1$) の de Bruijn 系列に含まれる CR 系列の存在に関して、参考文献 4 で Fredricksen によって提起された基本的な問題を部分的に解決する：

【 0 0 7 7 】

定理4 p が素数であるとき常に、長さ 2^{2p+1} の de Bruijn 系列に

< 式 R >

$$4 \sum_{i=0}^{2^p-1} \Delta^v(v(i))$$

個の CR 系列が存在する。ここで $v(i) \in V_{2p+1}^{CR}$ である。

【 0 0 7 8 】

次の例において、記法を簡明にするために、 $v^{(i(p))}$ から右肩の添記号+ を省略した。

例3

図 8 に $p = 2$ に対する CR グラフの原型を示す。図 9 と図 10 にそれぞれ 1100 および 1010 に同伴する CR グラフを示す。これら二つの CR グラフに対して、簡単な計算により $(1100) = 12$ および $(1010) = 4$ を得る。

【 0 0 7 9 】

したがって、長さ 2^5 の de Bruijn 系列に含まれる CR 系列の総数は 64 である。これにより参考文献 4 で観察された実験結果が理論的に確認される。

【 0 0 8 0 】

次に、 m が素数でない場合における長さ 2^{2m+1} の de Bruijn 系列に含まれる CR 系列の特徴付けを行う。以下に示す Dyck 言語を利用することにより、上記 Fredricksen の問題を完全に解決する。

10

20

30

40

50

【 0 0 8 1 】

5 . Dyck言語

参考文献 1 1、1 2 に従い、記号力学系の観点からDyck言語 $L(D_n)$ ($n \geq 1$)を定義する。 $\Sigma = \{ \alpha_m, \beta_m : 1 \leq m \leq n \}$ とおく。各 m ($1 \leq m \leq n$)について、 α_m は負の記号と呼ばれ、一方、 β_m は正の記号と呼ばれる。(零元を有する)逆単位的半群(逆モノイド) D_n を定義する:それは生成元 α_i, β_j ($1 \leq i, j \leq n$)および 1 (太字)を有し、それらの関係は次のようである:

< 式 S >

$$\alpha_i \cdot \beta_j = \begin{cases} 1, & i = j \text{ のとき,} \\ 0, & \text{それ以外 のとき,} \end{cases} \tag{10}$$

および $\gamma \cdot 1 = 1 \cdot \gamma = \gamma, \gamma \cdot 0 = 0 \cdot \gamma = 0 (\gamma \in \Sigma \cup \{1\}), 0 \cdot 0 = 0$

【 0 0 8 2 】

元の $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ (k を長さ k ($k \geq 1$) の Σ 上の語またはブロックと呼ぶ。長さ k の語を単に k -語と呼ぶ。 Σ 上の全ての語と空語 ϵ の集合を表すのに Σ^* を用いる。 Σ^* から逆モノイド D_n への写像を表すのに $red()$ を用いて、 $red : \Sigma^* \rightarrow D_n$ ($k \geq 1$) に対して、 $red(\alpha_i) = \alpha_i, red(\beta_j) = \beta_j$ および $red(\epsilon) = 1$ (太字)と定める。

【 0 0 8 3 】

Dyck言語 $L(D_n)$ は

$$L(D_n) = \{ u \in \Sigma^* : red(u) = 1 \}$$

で定義される。 $u \in \Sigma^*$ に対して $red(u) = 1$ (太字)ならば、 u は平衡であると言われる。空語 ϵ は平衡である。なお、参考文献 1 3 においては、 n 個の型の平衡括弧を有する言語がDyck言語と呼ばれている。

【 0 0 8 4 】

$L(D_1)$ に属する平衡語の集合は全ての正規括弧構造から成る。実際、 $n=1$ のとき、 $\Sigma = \{ \alpha_1, \beta_1 \}$ (および ϵ)と表すと、次の様に、三つの括弧対までの正規括弧構造を得ることができる:

$$\epsilon, (\alpha_1), (\alpha_1)\beta_1, ((\alpha_1)\beta_1), ((\alpha_1)\beta_1)\beta_1, ((\alpha_1)\beta_1)\alpha_1, (\alpha_1)((\alpha_1)\beta_1), (\alpha_1)\beta_1((\alpha_1)\beta_1). \tag{3}$$

注2: n 個の括弧対はCatalan数で数え上げられることは良く知られている:

< 式 T >

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

【 0 0 8 5 】

ステップ3' CRグラフの構成

上記ステップ2で提案されたアルゴリズムにより、CRグラフの原型 G_n^{CR} は既に構成されているとする。今、有向グラフ G_n^{CR} を变形することによって、CRグラフを構成する段階にある。 p が素数であるような場合に対しては、上記ステップ3において、長さ 2^{2p+1} のde Bruijn系列に属する全てのCR系列を既に構成した。ゆえに、以下、 m ($m \geq 2$)は素数でないとする。これにより $m \geq 4$ である。

【 0 0 8 6 】

準備: まず初めに、頂点 $v^{(i(k))}$ および、 $\sim v^{(i(k))}$ または $\sim v^{(i(k))}$ とラベル付けされた、その全部で $4(d(m) - 1)$ 個の有向辺を $\sim v^{(i(k))}$ から $v^{(i(k))}$ への $2(d(m) - 1)$ 個の有向辺で置き換える。ここで $v^{(i(k))} \in V_n^{CR}$ であり、 $k \geq 2$ を満たす。各 k に対して、結果として得られる $\sim v^{(i(k))}$ から $v^{(i(k))}$ への二つの有向辺に同じラベル $\sim v^{(i(k))} \rightarrow v^{(i(k))}$ を付ける。

10

20

30

40

50

【 0 0 8 7 】

G_n^- における $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ を選び、固定する。 $v^{(i)}$ が中立頂点でないならば、即ち、 $v^{(i)} \in V_n^{CR} \setminus V_n^{CR}$ ならば、ループである $v^{(i)}$ から $v^{(i)}$ への有向辺を加え、それに $v^{(i)} \rightarrow v^{(i)}$ とラベル付けする。 $v^{(i)}$ が中立頂点であるならば、即ち、 $v^{(i)} = v^{(i(k))}$ または $v^{(i)} = \sim v^{(i(k))}$ ならば、何もしない。というのは、 $\sim v^{(i(k))} \rightarrow v^{(i(k))}$ とラベル付けされた二つの有向辺が構成中のグラフに既に備わっているからである。この二つの有向辺は、 $v^{(i)} = v^{(i(k))}$ のとき $\sim v^{(i)}$ から $v^{(i)}$ へ向かい、または $v^{(i)} = \sim v^{(i(k))}$ のとき $v^{(i)}$ から $\sim v^{(i)}$ へ向かう。

【 0 0 8 8 】

ケース i)

$v^{(i)} \in V_n^{CR} \setminus V_n^{CR}$ ならば、 V_n^{CR} に属する中立頂点 $v^{(i(k))}$ と $\sim v^{(i(k))}$ の全ての対を、 p が素数である場合に図 6、図 7 で図示したのと同様に、各々二つの頂点に分裂すると、図 15 のように図示される。図 15 および図 16 においては、アッパーバーを用いて補数を表現している。

10

【 0 0 8 9 】

ケース ii)

$v^{(i)}$ が中立頂点、すなわち、 $k_0 (k_0 \geq 2, k_0 | m), v^{(i)} = v^{(i(k_0))}$ または $v^{(i)} = \sim v^{(i(k_0))}$ であるならば、 V_n^{CR} に属する中立頂点 $v^{(i(k_0))}$ と $\sim v^{(i(k_0))}$ の両方を、図 16 に示す様に、各々二つの頂点に分裂する。

一方、 V_n^{CR} に属する他の中立頂点の対 $v^{(i(k))}$ と $\sim v^{(i(k))}$ ($k \neq k_0$) の各々を上記図 15 と同じ方法で二つの頂点に分裂する。

20

【 0 0 9 0 】

結局、各 $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して、頂点集合 $(V_n^0 \setminus V_n^{00}, \dots) \cup V_n^- \cup V_n^{CR, +}$ を有するオイラー・グラフを得る。これを $H_{v^{(i)}}$ で表す。ここで $V_n^{CR, +} = \{v^{(i(k))}, \sim v^{(i(k))}, v^{(i(k))}, \sim v^{(i(k))} \in V_n^{CR}\}$ である。 $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路はCR系列を生成するので、これを $v^{(i)}$ に同伴するCRグラフと呼ぶ。全ての $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して頂点集合は同じであることに注意して、 $W_n^{CR} = (V_n^0 \setminus V_n^{00}, \dots) \cup V_n^- \cup V_n^{CR, +}$ と書く。 $B_{v^{(i)}}$ を用いて $H_{v^{(i)}}$ の有向辺全体の集合を表し、 $H_{v^{(i)}} = (W_n^{CR}, B_{v^{(i)}})$ と書く。この段階において、 2^m 個のCRグラフを得る。 $H_{v^{(i)}}$ と $H_{\sim v^{(i)}}$ がグラフ同型であることに注意するのは有益である。

30

【 0 0 9 1 】

ステップ4' 全てのCR系列の生成

上記 p が素数の場合において、CR頂点の概念を用いることにより、EtzionとLempelによるCR系列の特徴付けの精密化を次の様に得た。 $m \geq 4$ が素数でない場合にも、CR系列の構成において、これは決定的に重要な役割を果たすので再記する。

補題5

< 式 U >

$$X \cong \overset{r}{\sim} WW$$

40

は、長さ 2^{2m+1} のde Bruijn系列に属するCR系列であるとする。ここで $w = w_1 w_2 \dots w_{2^2}^m \in \{0, 1\}^{2^{2m}}$ 。このとき、一意のCR頂点 $v \in V_{2m+1}^{CR}$ が存在して、

$$v = \overset{r}{\sim} (W_1 W_2 \dots W_m) W_1 W_2 \dots W_m \\ = W_2^{2m-m+1} \dots W_2^{2m-1} W_2^{2m} \overset{r}{\sim} (W_2^{2m-m+1} \dots W_2^{2m-1} W_2^{2m}) \quad (1)$$

を満たす。さらに、一意の v は $0v1$ と $1v0$ の形式で X に二度現れる。一方、他のCR頂点 $u \in V_{2m+1}^{CR}$ は $1u1$ または $0u0$ の形式で w に一度だけ現れる。

【 0 0 9 2 】

ステップ3' と同様、 $m \geq 4$ は素数でないとする。固定した $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して、 $H_{v^{(i)}}$ はオイラー・グラフであるので、 $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路を得る。回路は、 V_n^{CR} に属する元の $(2(d(m) - 1) - 1)!$ 個の円順列の一つを表す。 p が素数であるような、 $m = p$ の

50

場合と異なり、mが素数でないならば、全ての回路がCRを生成するとは限らない。新たな概念を導入するのに用いるため、上記で述べた定義を再記する。

【 0 0 9 3 】

語wに対して、w^kを用いて、wのk個の複製の接続、即ち図3に示すような態様を表す。整数aとbに対して、aがbの約数であるとき、a|bと書く。[x]を用いて、xを超えない最大の整数を表す。Sを用いて、{0,1}^{2m}の上のシフト変換を表す。即ち、v=v₁v₂⋯v_{2m} ∈ {0,1}^{2m}に対してS(v₁,v₂,⋯,v_{2m-1},v_{2m}) = (v₂,v₃,⋯,v_{2m},v₁)。

【 0 0 9 4 】

定義3 m (2) に対して、V_n^{CR}に属する形式v^{(i(k))} = (1^k0^k)^{m/k}および~v^{(i(k))}の2(d(m) - 1)個の頂点は中立頂点と呼ばれる。ここでk ≥ 2, k|mおよび

10

$$i(k) = \frac{2^{2k \lfloor \frac{m}{k} \rfloor + k} - 2^k}{2^k + 1}$$

である。V_n^{CR, v}を用いて、V_n^{CR}に属する中立頂点全体の集合を表す。各j = 1, 2, ⋯, k - 1に対して、S^j(v^{(i(k))})はV_n¹¹に属する。V_n¹¹に属するその様な頂点もまた中立と呼ばれる。V_n^{11, v}を用いて、V_n¹¹に属する中立頂点全体の集合を表す。V_n⁰⁰に属する中立頂点全体の集合V_n^{00, v}が相補的に定義される。

20

【 0 0 9 5 】

CRグラフにおけるオイラー回路から全てのCR系列を構成するために、次を導入する。

定義4 各中立頂点v^{(i(k))} ∈ V_n^{CR, v} に対して、対0~v^{(i(k))} v^{(i(k))}0と1~v^{(i(k))} v^{(i(k))}1は平衡であると言われる。ここでk|m, k ≥ 2であり、またi(k)は定義3で述べたようである。同様に、対0~v^{(i(k))} v^{(i(k))}1と1~v^{(i(k))} v^{(i(k))}0は平衡であると言われる。

【 0 0 9 6 】

H_{v(i)}におけるすべてのオイラー回路にはd(m) - 1個の平衡対が存在することがわかる。その様な平衡対の集合をDyck言語L(D_{d(m) - 1})に対するアルファベット とみなす。

30

【 0 0 9 7 】

ケースi)

V_n^{CR}に属するv⁽ⁱ⁾が中立頂点でないならば、k|m, k ≥ 2であるような各kに対して、その様なkと1 - j(k) d(m) - 1なるj(k)の間の一対一対応が存在して、

$$\{0\sim v^{(i(k))} v^{(i(k))}0, 1\sim v^{(i(k))} v^{(i(k))}1\} = \{ j(k), j(k) \} \quad (4)$$

を満たす。

【 0 0 9 8 】

ケースii)

v⁽ⁱ⁾が中立頂点、すなわち、k₀(k₀ ≥ 2, k₀|m), v⁽ⁱ⁾ = v^{(i(k₀))}またはv⁽ⁱ⁾ = ~v^{(i(k₀))}であるならば、

40

$$\{0\sim v^{(i(k_0))} v^{(i(k_0))}1, 1\sim v^{(i(k_0))} v^{(i(k_0))}0\} = \{ j(k_0), j(k_0) \}$$

を得る。他のk ≠ k₀に対して、対応はv⁽ⁱ⁾が中立頂点でない場合と同じであり、(4)で与えられる。

【 0 0 9 9 】

ケースi)またはii)のいずれの場合においても、平衡対の集合と の間に、2^{d(m) - 1}個の一対一対応を得る。

準備：(3)で示した様に、d(m) - 1対の括弧を有する全ての正規括弧構造を考える。注意2により、その総数は

< 式 W >

50

$$\frac{1}{d(m)} \binom{2(d(m) - 1)}{d(m) - 1}$$

で与えられる。

【 0 1 0 0 】

その様な長さ $2(d(m) - 1)$ の正規括弧構造は、 $d(m) - 1$ 個の開括弧(を持つ。 $d(m) - 1$ 個の開括弧の位置に、 $d(m) - 1$ 個の負の記号 $-, \dots, -$ を自由に配列することができる。その総数は $(d(m) - 1)!$ で与えられる。長さ $2(d(m) - 1)$ の正規括弧構造から平衡Dyck語を得るために、 $d(m) - 1$ 個の負の記号のその様な順列を一つ選べば、正の記号 $+, \dots, +$ の位置は一意に決定される。循環順序に関する同値関係を考慮して、結局、 $L(D_{d(m) - 1})$ に属する長さ $2(d(m) - 1)$ の平衡Dyck語に対応するような、定義4で述べた平衡対の集合に属する元の

10

< 式 X >

$$\frac{1}{d(m)} \binom{2(d(m) - 1)}{d(m) - 1} \frac{(d(m) - 1)!}{2(d(m) - 1)} 2^{d(m)-1}$$

20

個の円順列を得る。定義4の平衡対の集合に属する元のその様な円順列は、 $d(m) - 1$ 個の型の括弧対を有する長さ $2(d(m) - 1)$ の正規括弧構造であると言われる。その様な円順列として表されるような、CRグラフにおけるオイラー回路だけがCR系列を生成することができることを以下に示す。

【 0 1 0 1 】

各CRグラフにおけるその様なオイラー回路の存在は次により保証される。

補題6 各 $v^{(i)} \in V_n^{CR}$ に対して、 $d(m) - 1$ 個の型の括弧対を有する長さ $2(d(m) - 1)$ の正規括弧構造で表されるような、 $H_{v^{(i)}}$ におけるあるオイラー回路が存在する。

以下、CRグラフ $H_{v^{(i)}}$ が一度与えられれば、上で述べた正規括弧構造で表されるような $H_{v^{(i)}}$ における全てのオイラー回路を得るとしてよい。実際、 $H_{v^{(i)}}$ における全てのオイラー回路を実現して、それら各々に対して正規括弧構造で表されるかどうかを調べ、正規括弧構造で表されるようなオイラー回路だけを全て予め選別すればよい。

30

【 0 1 0 2 】

Y は、正規括弧構造で表されるような、 $H_{v^{(i)}}$ におけるオイラー回路であるとする。回路 Y を $\{0, 1\}$ 上の系列と同一視する。ここで \sim = と定義する。

Y によって生成される周期列 $Y \sim$ を考える。 (\cdot) を用いて、 Y に対する、上で述べた $2d(m) - 1$ 個の一対一対応の一つを表す。次の観察は、CR系列の構成において重要な役割を果たす。

注3：各対応 $(\cdot) = a \sim v \sim vb$ に対して、

< 式 Y >

40

$$\hat{\Phi}(\gamma) = av\lambda \sim vb$$

と定義する。ここで $a, b \in \{0, 1\}$, および $v \in V_n^{CR}$ である。このとき、 $1 \leq j \leq d(m) - 1$ に対して、

< 式 Z >

$$r \sim \left(\Phi(\alpha_j) w \Phi(\beta_j) \right) = \hat{\Phi}(\alpha_j) r \sim w \hat{\Phi}(\beta_j)$$

50

を得る。ここで $w \in \{0, 1, \dots\}^*$ である。

【 0 1 0 3 】

ケース i)

$v^{(i)}$ が V_n^{CR} に属する中立頂点でないならば、循環順序に関する同値関係を考慮して、 Y は次の形式で一意に書かれる：

$$v^{(i)}0f(\)g(\)h0v^{(i)} \ v^{(i)}0f \dots \quad (5)$$

ここで $(\)_{j_1}$ は対応する平衡Dyck語における最左の負の記号であり、また $v^{(i)}$ は

$$v^{(i)}0f(\)g(\)h0v^{(i)}$$

に丁度二回現れる。二つの場合、即ち、 $(\)_{j_1} = 0\sim v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}0$ かつ $(\)_{j_1} = 1\sim v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}1$ 、または $(\)_{j_1} = 1\sim v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}1$ かつ $(\)_{j_1} = 0\sim v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}0$ を考えなければならない。しかしながら、前者の場合だけを考える。というのは、 Y から CR 系列を構成する手続きはいずれについても全く同じであるからである。

10

【 0 1 0 4 】

開始ステップ：まず初めに、 Y における

$$v^{(i)}0f0\sim v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}0g1\sim v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}1h0v^{(i)}$$

を

$$v^{(i)}0f0\sim v^{(i(k_1))} \ r\sim(v^{(i(k_1))}0g1\sim v^{(i(k_1))}) \ v^{(i(k_1))}1h0v^{(i)}$$

へ変換する。 $v^{(i(k_1))}$ と $\sim v^{(i(k_1))}$ が CR 語であることに注意して、

$$v^{(i)}0f0\sim v^{(i(k_1))} \ \sim v^{(i(k_1))}0r\sim g1v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}1h0v^{(i)}$$

20

を得る。二つの \sim を消去した後、繰り返し $\sim v^{(i(k_1))} \ \sim v^{(i(k_1))}$ と $v^{(i(k_1))} \ v^{(i(k_1))}$ の各々を単一の語 $\sim v^{(i(k_1))}$ と $v^{(i(k_1))}$ にそれぞれ置き換えて、

$$v^{(i)}0f0\sim v^{(i(k_1))}0r\sim g1v^{(i(k_1))}1h0v^{(i)}$$

を得る。これを $Z^{(1)}$ で表す。

【 0 1 0 5 】

2 から $(d(m) - 1)$ までの繰り返しステップ：

次に、 $Z^{(1)}$ は、(5)において、 $(\)_{j_2}$ と $(\)_{j_2}$ が g または h に現れることに依存して、それぞれ

< 式 A C >

30

$$v^{(i)}0f^{(2)}\hat{\Phi}(\alpha_{j_2})g^{(2)}\hat{\Phi}(\beta_{j_2})h^{(2)}0v^{(i)} \text{ または } v^{(i)}0f^{(2)}\Phi(\alpha_{j_2})g^{(2)}\Phi(\beta_{j_2})h^{(2)}0v^{(i)}$$

の形式で書かれる。ここで $(\)_{j_2}$ は対応する平衡Dyck語における最左から第二の負の記号である。 Y は平衡括弧構造を有するので、(5)において、 $(\)_{j_2}$ と $(\)_{j_2}$ は共に g または h のいずれかに現れるが、別々に g と h に現れない。もしも $(\)_{j_2}$ と $(\)_{j_2}$ が別々に g と h に現れたとすると、それらは平衡括弧構造を壊すことになるであろう。両者が共に g に現れるときでさえ、注意3により、 g から $r\sim g$ への上記変換は、 Y における平衡括弧構造に影響しない。

平衡括弧構造を変更することなく、上の変換を繰り返すことにより、帰納的に $Z^{(d(m) - 1)}$ を得る。

【 0 1 0 6 】

40

最終ステップ：

再び $v^{(i(k))}$ と $\sim v^{(i(k))}$ が CR 語であることに注意して、

$$Z^{(d(m) - 1)}r\sim Z^{(d(m) - 1)} = v^{(i)}0f0\sim v^{(i(k_1))}0 \dots 0v^{(i)}v^{(i)}1 \dots 1\sim v^{(i(k_1))}1r\sim f1v^{(i)}$$

を得る。循環順序において二度現れる各々の繰り返し $v^{(i)} \ v^{(i)}$ を単一の語 $v^{(i)}$ でそれぞれ置き換えることにより、長さ 2^{2m+1} の CR 系列

$$X = v^{(i)}0f0\sim v^{(i(k_1))}0 \dots 0v^{(i)}1 \dots 1\sim v^{(i(k_1))}1r\sim f1$$

を得る。得られた CR 系列が長さ 2^{2m+1} の de Bruijn 系列に属することを確認するのは容易である。

【 0 1 0 7 】

50

ケースii)

$v^{(i)}$ が中立頂点、すなわち、 $v^{(i)} = v^{(i(k_0))}$ または $v^{(i)} = \sim v^{(i(k_0))}$ である場合を考える。これら両方の場合を考えなければならないが、 $v^{(i)} = v^{(i(k_0))}$ の場合だけを考える。というのは、

<式AD>

$$H_{v^{(i)}} \cong H_{\sim v^{(i)}}$$

であるからである。

このとき、循環順序に関する同値関係を考慮して、 Y は次の形式で書かれる：

$$(\)_{j_1} f (\)_{j_1} g (\)_{j_1} f \dots$$

10

【0108】

ここで j_1 は対応する平衡Dyck語における最左の負の記号であり、また $\sim v^{(k_0)}$ $v^{(k_0)}$ は $(\)_{j_1} f (\)_{j_1} g$ に丁度二回現れる。二つの場合、即ち、 $(\)_{j_1} = 1 \sim v^{(i(k_0))}$ $v^{(i(k_0))} 0$ かつ $(\)_{j_1} = 0 \sim v^{(i(k_0))}$ $v^{(i(k_0))} 1$ 、または $(\)_{j_1} = 0 \sim v^{(i(k_0))}$ $v^{(i(k_0))} 1$ かつ $(\)_{j_1} = 1 \sim v^{(i(k_0))}$ $v^{(i(k_0))} 0$ を考えなければならない。しかしながら、 Y からCR系列を構成する手続きはいずれの場合についても全く同じであるので、前者の場合だけを考える。このとき、循環順序に関する同値関係を考慮して、 Y は次の形式で一意に書かれる：

$$v^{(i(k_0))} 0 f 0 \sim v^{(i(k_0))} v^{(i(k_0))} 1 g 1 \sim v^{(i(k_0))} v^{(i(k_0))} 0 f \dots$$

【0109】

20

Y における

$$v^{(i(k_0))} 0 f 0 \sim v^{(i(k_0))} v^{(i(k_0))} 1 g 1 \sim v^{(i(k_0))}$$

を

$$v^{(i(k_0))} 0 f 0 \sim v^{(i(k_0))} r \sim (v^{(i(k_0))} 1 g 1 \sim v^{(i(k_0))}) \\ = v^{(i(k_0))} 0 f 0 \sim v^{(i(k_0))} \sim v^{(i(k_0))} 0 r \sim g 0 v^{(i(k_0))}$$

へ変換する。二つの \sim を消去した後、繰り返し $\sim v^{(i(k_0))} \sim v^{(i(k_0))}$ を単一の語 $\sim v^{(i(k_0))}$ に置き換えて、

$$v^{(i(k_0))} 0 f 0 \sim v^{(i(k_0))} 0 r \sim g 0 v^{(i(k_0))}$$

を得る。これを $Z^{(1)}$ で表す。上のケースi)と全く同じ手続きを用いることにより、帰納的に $Z^{(d(m)-1)}$ を得る。上のケースi)と同じ様に、 $Z^{(d(m)-1)} r \sim Z^{(d(m)-1)}$ を変形することにより、長さ 2^{2m+1} のde Bruijn系列に属するCR系列 X を得る。

30

【0110】

逆に、長さ 2^{2m+1} のde Bruijn系列に含まれるCR系列 X が与えられるとき、 X または $\sim X$ において、補題5から、条件(1)を満たす一意の $v^{(i)} V_{2m+1}^{CR}$ を見付けることができる。 $v^{(i)}$ が中立であるか否かに依存して、ケースi)またはii)の手続きを反転すれば、 X または $\sim X$ から $H_{v^{(i)}}$ に含まれるオイラー回路を得る。この対応は2対1かつ上への対応である。 $n \geq 3$ に対して、

<式AA>

$$X \cong \sim X$$

40

であるので(参照文献5参照)、CR系列 X に対して、 $\sim X$ は相異なるCR系列を与える。ゆえに、 $v^{(i)} V_{2m+1}^{CR}$ に対する上の手続きは、全体として、長さ 2^{2m+1} のde Bruijn系列に含まれるCR系列の全ての対 $(X, \sim X)$ を尽くす。

結局、次の定理を得る。

【0111】

定理5 $m \geq 4$ が素数でない場合、長さ 2^{2m+1} のde Bruijn系列に含まれるCR系列が少なくとも 2^{m+1} 個存在する。

したがって、上記定理4と合わせて、長さ 2^{2m+1} ($m \geq 1$) のde Bruijn系列に含まれるCR系列の存在に関して、参考文献4においてFredricksenにより提唱された基本的問題を完全

50

に解決した。

【 0 1 1 2 】

以下に、参考文献を列挙する。

- [1] H. Fujisaki, "Discretized Markov Transformations - An Example of Ultradiscrete Dynamical Systems -", IEICE Trans. Fundamentals, vol.E88-A, pp.2684-2691、2005。
- [2] N. G. de Bruijn, "A Combinatorial Problem," Nederl. Akad. Wetensch. Proc., vol.49, pp. 758 - 764, 1946。
- [3] C. Flye Sainte-Marie, "Solution to problem number 58," L'Intermediare des Mathematiciens, vol. 1, pp.107 - 110, 1894。 10
- [4] H. Fredricksen, "A Survey of Full Length Nonlinear Shift Register Cycle Algorithm," SIAM Review, vol.24, pp. 195 - 221, 1982。
- [5] A. H. Chan, R. A. Games, and E. L. Key, "On the Complexities of de Bruijn Sequences," J. Comb. Theory, Ser. A, vol. 33, pp. 233 - 246, 1982。
- [6] T. Etzion and A. Lempel, "On the distribution of de Bruijn sequences of given complexity," IEEE Trans.on Information Theory, vol. 30, pp. 611 - 614, 1984。
- [7] H. Fujisaki, "An Algorithm For Generating All Full-Length Sequences Which Are Based On Discretized Markov Transformations," NOLTA, IEICE, vol. 1, pp. 166 - 175, 2010。 20
- [8] W. T. Tutte, "The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles," Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 44, pp. 463 - 482, 1948。
- [9] T. van Aardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn, "Circuits and trees in oriented linear graphs," SimonStevin, vol. 28, pp. 203 - 217, 1951。
- [10] J. B. Kruskal, "On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem," Proceedings of the American Mathematical Society, vol 7, pp. 48 - 50, 1956。
- [11] T.Hamachi and K. Inoue, "Embedding of Shifts of Finite Type into the Dyck Shift," Monatshefte für Mathematik, vol.145, pp. 107 - 129, 2005。
- [12] T.Meyerovitch, "Tail invariant measures of the Dyck shift," Israel J. of Math., vol.163, pp.61 - 83, 2008。 30
- [13] J.E.Hopcroft and J.D.Ulman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison-Wesley, 1979。

【 実施例 1 】

【 0 1 1 3 】

ここで、実施例 1 を用いて、本発明の実施の形態について説明する。図 1 1 は、本発明の実施例 1 にかかる符号生成装置 1 0 0 を示す図である。符号生成装置 1 0 0 は、メモリ 1 0 と、オイラーグラフ生成部 1 2 と、取得部 1 4 と、第 1 C R グラフ生成部 1 6 とを、第 2 C R グラフ生成部 1 8 と、C R 系列生成部 2 0 とを含む。

【 0 1 1 4 】

この符号生成装置 1 0 0 においては、長さ $2^{(2p+1)}$ の de Bruijn 系列に含まれる CR 系列を生成する。メモリ 1 0 は、オイラーグラフ生成部 1 2 と、第 1 C R グラフ生成部 1 6 とを、第 2 C R グラフ生成部 1 8 と、C R 系列生成部 2 0 と接続され、それぞれのブロックにおいて生成されたグラフを記憶し、必要に応じてアクセスされて、記憶している情報を出力する。

【 0 1 1 5 】

オイラーグラフ生成部 1 2 は、上記ステップ 1 において説明したように、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれた de Bruijn グラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなるように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成して、メモリ 1 0 に記憶する。

。

10

20

30

40

50

【0116】

具体的には、オイラーグラフ生成部12は、 $u = a_1a_2 \dots a_{n-1}$ と $v = a_2a_3 \dots a_n$ の二つの頂点に対して、二進 n -語 $a_1a_2 \dots a_n$ が u から v への有向辺となる de Bruijn グラフ G_n に含まれる部分グラフのうち、 $u1$ 、 $1u$ のいずれかの型の不在の有向辺に対応して、
から出る、またはへ向かう有向辺を、全ての $u = 0v$ に対して、 u からへへの有向辺 u を加える、または、全ての $u = v0$ に対してから u への有向辺 u を加えることによって、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成すればよい。なお、二進 n -語 $a_1a_2 \dots a_n$ が u から v への有向辺となる de Bruijn グラフ G_n は、生成したい符号の長さを考慮して、所定の従来技術を用いて生成されてもよく、このような態様であっても、本発明の実施になら影響を与えるものでないことは、当業者において自明であると言える。

10

【0117】

なお、メモリ10に記憶されるグラフの態様は、通常の技術が用いられてもよい。なお、複数の頂点は、入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含んでもよい。

【0118】

取得部14は、素数 p を取得して、第1CRグラフ生成部16に出力する。 p は、生成したい符号の長さを $2^{2^{p+1}}$ として求めればよく、 p の代わりに符号長自体を入力して、 p を計算により導出してもよい。

【0119】

第1CRグラフ生成部16は、上記ステップ2において説明したように、オイラーグラフ生成部12によって生成された有向オイラーグラフ G_n^0 をメモリ10から読み出して、取得部14によって取得された p に対するCRグラフの原型に変形し、メモリ10に記憶する。

20

【0120】

具体的には、第1CRグラフ生成部16は、有向オイラーグラフ G_n^0 において、中立頂点を除いたすべての頂点 $v \in V_n^0$ を二つの頂点、すなわち、有向辺 $0v$ と $v0$ を有する v と、有向辺 $1v+$ と $v+0$ を有する $v+$ とに分裂する。さらに、第1CRグラフ生成部16は、分裂後の部分グラフから、単一のループ $1^i v^+ 1^j$ を削除する。

【0121】

ついで、第1CRグラフ生成部16は、中立頂点の各対 $v^{(i(k))}$ と $\sim v^{(i(k))}$ に含まれる $\sim v^{(i(k))}$ から $v^{(i(k))}$ への有向辺 $\sim v^{(i(k))} 0^k v^{(i(k))}$ の一部を削除する。さらに、第1CRグラフ生成部16は、から $v^{(i(k))}$ への有向辺を加え、それに $v^{(i(k))}$ とラベル付けする。また、 $\sim v^{(i(k))}$ からへの有向辺を加え、それに $\sim v^{(i(k))}$ とラベル付けする。

30

【0122】

以上により、CRグラフの原型は、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなる。ここで、CRグラフの原型における複数の頂点は、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含む。

【0123】

第2CRグラフ生成部18は、上記ステップ3において説明したように、第1CRグラフ生成部16によって生成されたCRグラフの原型をメモリ10から読み出して、CRグラフを生成し、メモリ10に記憶する。

40

【0124】

具体的には、第2CRグラフ生成部18は、頂点および、 $v^{(i(p))}$ または $\sim v^{(i(p))}$ (ここで $v^{(i(p))} \in V_n^{CR, v}$)、とラベル付けされた、その全部で四つの有向辺を $\sim v^{(i(p))}$ から $v^{(i(p))}$ への二つの有向辺で置き換え、各々 $\sim v^{(i(p))} v^{(i(p))}$ と同じラベルを付ける。ここで、 $v^{(i)}$ が中立頂点でないならば、ループである $v^{(i)}$ から $v^{(i)}$ への有向辺を加え、それに $\sim v^{(i)} v^{(i)}$ とラベル付けする。一方、 $v^{(i)}$ が中立頂点であるならば、何もしない。この二つの有向辺は、 $v^{(i)} = v^{(i(p))}$ のとき $\sim v^{(i)}$ から $v^{(i)}$ へ向か

50

い、または $v^{(i)} = \sim v^{(i(p))}$ のとき $v^{(i)}$ から $\sim v^{(i)}$ へ向かう。

【0125】

ここで、CRグラフは、第1CRグラフ生成部16によって生成されたCRグラフの原型に含まれる少なくとも1つの中立頂点を含む複数の頂点のそれぞれを2つの頂点に分裂させることによって、生成される。

【0126】

CR系列生成部20は、上記ステップ4において説明したように、第2CRグラフ生成部18によって生成されたCRグラフからCR系列を生成する。

【0127】

つぎに、動作例について説明する。図12は、図11の符号生成装置100の処理例を示すフローチャートである。このフローチャートは、生成すべき符号の長さが決定されたことを契機として開始されてもよい。

【0128】

まず、生成すべき符号の長さからPを取得する(S10)。ここで、Pが素数でない場合(S12のNo)、後述する処理Aを実行する。一方、Pが素数であった場合(S12のYes)、上記ステップ1にしたがって、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなり、かつ、複数の頂点が入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含むように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成する(S14)。

【0129】

ついで、上記ステップ2にしたがって、生成された有向オイラーグラフ G_n^0 をメモリ10を変形して、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなり、かつ、複数の頂点は、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含むように、取得されたpに対するCRグラフの原型に変形する(S16)。

【0130】

さらに、上記ステップ3にしたがって、生成されたCRグラフの原型に含まれる少なくとも1つの中立頂点を含む複数の頂点のそれぞれを2つの頂点に分裂させることによって、CRグラフを生成する(S18)。ここで、上記ステップ4にしたがって、生成されたCRグラフからCR系列を生成する。

【0131】

一方、図12において、符号生成装置100は、取得部14において生成すべき符号の長さ $N=2^n$ からPを取得し(S10)、Pが素数でない $m(4)$ の場合(S12のNo)、図17に示す処理Aを実行する。図17のフローチャートにおいて、S14、S16の処理は、上記図12のS14、16の処理と同様である。すなわち、オイラーグラフ生成部12は、上記ステップ1にしたがって、複数の頂点のそれぞれが辺で結ばれたde Bruijnグラフ G_n を用いて、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなり、かつ、複数の頂点が入次数と出次数が共に第1所定値となる第1頂点と、入次数と出次数が共に2となる第2頂点とを含むように、有向オイラーグラフ G_n^0 を生成する(S14)。

【0132】

ついで、上記ステップ2にしたがって、第1CRグラフ生成部16は、上記生成された有向オイラーグラフ G_n^0 を変形して、それぞれの頂点における入次数と出次数が等しくなり、かつ、複数の頂点は、入次数と出次数が共に第2所定値となる第3頂点と、入次数と出次数が共に2となる複数の第4頂点と、入次数と出次数が共に1となる第5頂点とを含むように、取得されたpに対するCRグラフの原型に変形する(S16)。

【0133】

さらに、第2CRグラフ生成部18は、上記ステップ3'にしたがって、第1CRグラフ生成部16によって生成されたCRグラフの原型に含まれる少なくとも1つの中立頂点を含む複数の頂点のそれぞれを2つの頂点に分裂させることによって、CRグラフを生成する(S20)。ここで、CR系列生成部20は、上記ステップ4'において説明したよ

10

20

30

40

50

うに、Dyck言語を利用することにより、第2CRグラフ生成部18によって生成されたCRグラフから正規括弧構造を持つオイラー回路を選別し(S22)、選別したオイラー回路を用いてCR系列を生成する(S24)。

【0134】

第2CRグラフ生成部18で生成される各頂点 $v^{(i)}$ V_n^{CR} に対するCRグラフに含まれるオイラー回路は、 V_n^{CR} に属する元の $(2(d(m)-1)-1)!$ 個の円順列の一つを表すが、 m が素数でないならば、全ての回路がCRを生成するとは限らない。そこで、CR系列生成部20は、 $d(m)-1$ 個の型の括弧対を有する長さ $2(d(m)-1)$ の正規括弧構造を持つ円順列として表されるような、CRグラフにおけるオイラー回路だけがCR系列を生成することができる、という概念を導入する。

10

【0135】

したがって、上記実施例1によれば、任意の奇数 n (≥ 3)に対する、全てのCR系列を生成可能な符号生成装置を提供することができる。これにより、 n が7以上の奇数となるような、比較的長い系列長を有するCR系列を効率的に生成することが可能になる。

【0136】

ここで変形例について説明する。第1の変形例は、解析装置である。図13は、第1の変形例にかかる解析装置200の構成例を示す図である。この解析装置200は、RNAのde novoシーケンス解析やリシーケンシングを用いる次世代DNAシーケンス解析に好適である。

【0137】

解析装置200は、符号生成装置100と、分析部30とを含む。符号生成装置100は、図4に図示した符号生成装置100である。ここで、分析部30は、符号生成装置100によって生成された符号を用いて、分析対象となる塩基配列について分析を行い、結果を出力する。

20

【0138】

第2の変形例は、通信装置である。第2の変形例は、通信装置である。図14は、第2の変形例にかかる通信装置300の構成例を示す図である。

【0139】

通信装置300は、符号生成装置100と、符号化部40と、送信部42とを含む。符号生成装置100は、図4に図示した符号生成装置100である。ここで、符号化部30は、符号生成装置100によって生成された符号を用いて、送信すべき信号に対して符号化処理を実施する。ここで、符号化処理は、誤り訂正符号化処理であってもよいし、暗号化処理であってもよい。また、CDMなどの符号を用いた符号化処理であってもよい。送信部42は、符号化部40によって符号化処理された信号を送信処理する。

30

【0140】

以上、本発明を実施の形態をもとに説明した。本発明は上述した実施例並びに各実施例の内容に限定されるものではなく、本発明の要旨の範囲内において種々に変形して実施することが可能である。上記実施の形態は例示であり、それらの各構成要素や各処理プロセスの組み合わせにいろいろな変形例が可能で、またそうした変形例も本発明の範囲にあることは当業者に理解されるところである。

40

【産業上の利用可能性】

【0141】

長い系列長を有するCR系列を効率的に生成できる。

【図面の簡単な説明】

【0142】

【図1】本発明にかかる第1のde Bruijnグラフの構成例を示す図である。

【図2】本発明にかかる第2のde Bruijnグラフの構成例を示す図である。

【図3】本発明にかかる語 w の態様を示す図である。

【図4】本発明にかかる第1のグラフの構成例を示す図である。

【図5】本発明にかかる第2のグラフの構成例を示す図である。

50

- 【図 6】本発明にかかる第 3 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 7】本発明にかかる第 4 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 8】本発明にかかる第 5 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 9】本発明にかかる第 6 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 10】本発明にかかる第 7 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 11】本発明の実施例 1 にかかる符号生成装置の構成例を示す図である。
- 【図 12】図 11 の符号生成装置の処理例を示すフローチャートである。
- 【図 13】第 1 の変形例にかかる解析装置の構成例を示す図である。
- 【図 14】第 2 の変形例にかかる通信装置の構成例を示す図である。
- 【図 15】本発明にかかる第 7 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 16】本発明にかかる第 8 のグラフの構成例を示す図である。
- 【図 17】図 12 の処理 A を示すフローチャートである。

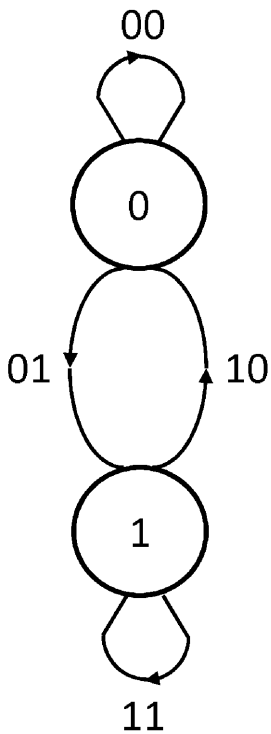
10

【符号の説明】

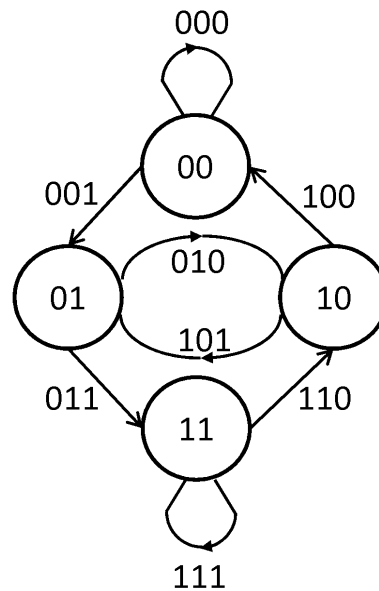
【0143】

10 メモリ、 12 オイラーグラフ生成部、 14 取得部、 16 第 1 CR グラフ生成部、 18 第 2 CR グラフ生成部、 20 CR 系列生成部、 100 符号生成装置、 200 解析装置、 300 通信装置。

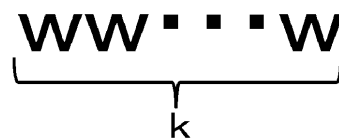
【図 1】



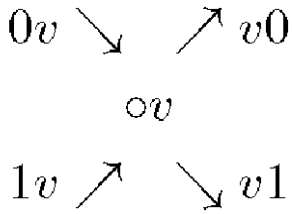
【図 2】



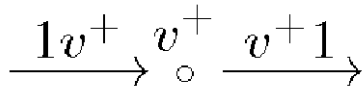
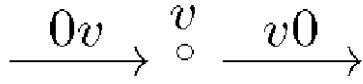
【図 3】



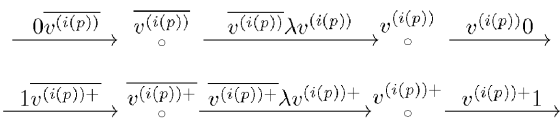
【図 4】



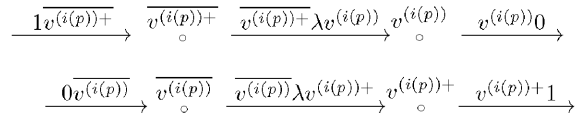
【図 5】



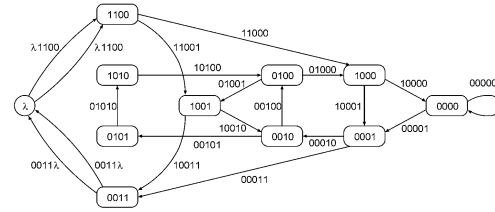
【図 6】



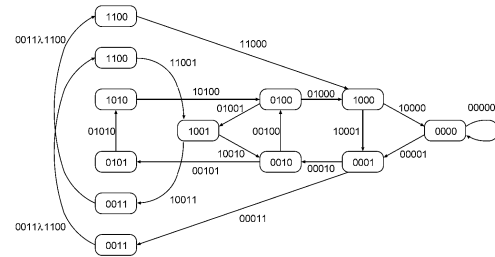
【図 7】



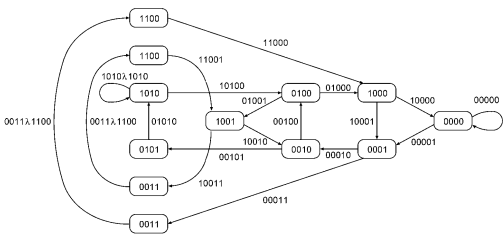
【図 8】



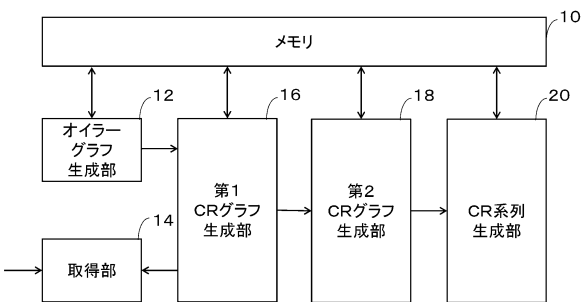
【図 9】



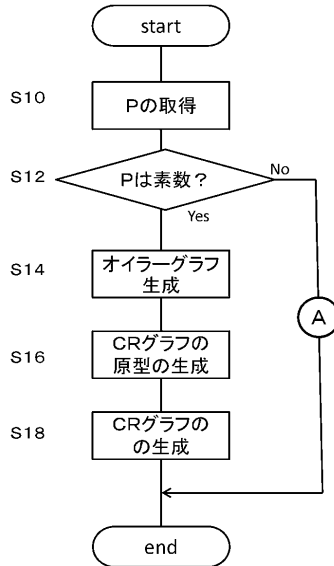
【図 10】



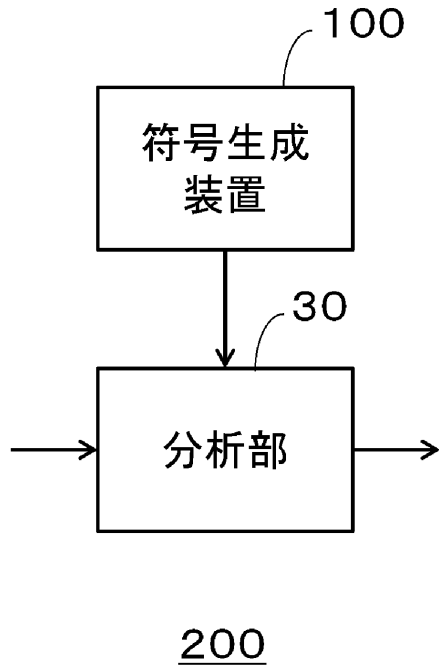
【図 11】



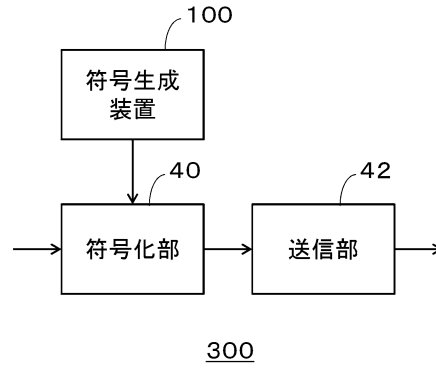
【図 12】



【図13】



【図14】



【図15】

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{0v^{(i(k))}} \xrightarrow{v^{(i(k))}} \xrightarrow{v^{(i(k))}\lambda v^{(i(k))}} \xrightarrow{v^{(i(k))}} \xrightarrow{v^{(i(k))}0} \\ \xrightarrow{1v^{(i(k))+}} \xrightarrow{v^{(i(k))+}} \xrightarrow{v^{(i(k))+}\lambda v^{(i(k))+}} \xrightarrow{v^{(i(k))+}} \xrightarrow{v^{(i(k))+}1} \end{array}$$

【図16】

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{1v^{(i(k_0))+}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))+}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))+}\lambda v^{(i(k_0))}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))}0} \\ \xrightarrow{0v^{(i(k_0))}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))}\lambda v^{(i(k_0))+}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))+}} \xrightarrow{v^{(i(k_0))+}1} \end{array}$$

【図17】



フロントページの続き

(56)参考文献 特開2011-227632(JP,A)

Hiroshi Fujisaki, "On auto-correlation values of de Bruijn sequences", Nonlinear Theory and Its Applications, 米国, IEICE, 2011年10月 1日, Vol. 2, No. 4, p.400-408

(58)調査した分野(Int.Cl., DB名)

G06F 7/58