平成１４年度採択　さきがけ研究

「離散・連続複合系の分散最適化シミュレーション」

東京大学大学院情報理工学系研究科　室田一雄

１．研究概要

工学システムのシミュレーションについては，各固有分野で十分な技術的蓄積があるが，離散と連続が複合したシステムや，極めて多数の独立したエージェントからなる分散的状況における最適化シミュレーションについては，未だ，確固たる数理的基礎に基づく方法論は確立されていない．本研究の研究課題は以下の３点である：

・偏微分方程式や代数方程式で記述される現象（連続系）と事象生起による状態の変化（離散系）を含む複合システムに対するシミュレーション技法の数学的基礎として，最適化における連続と離散の整合性の問題，

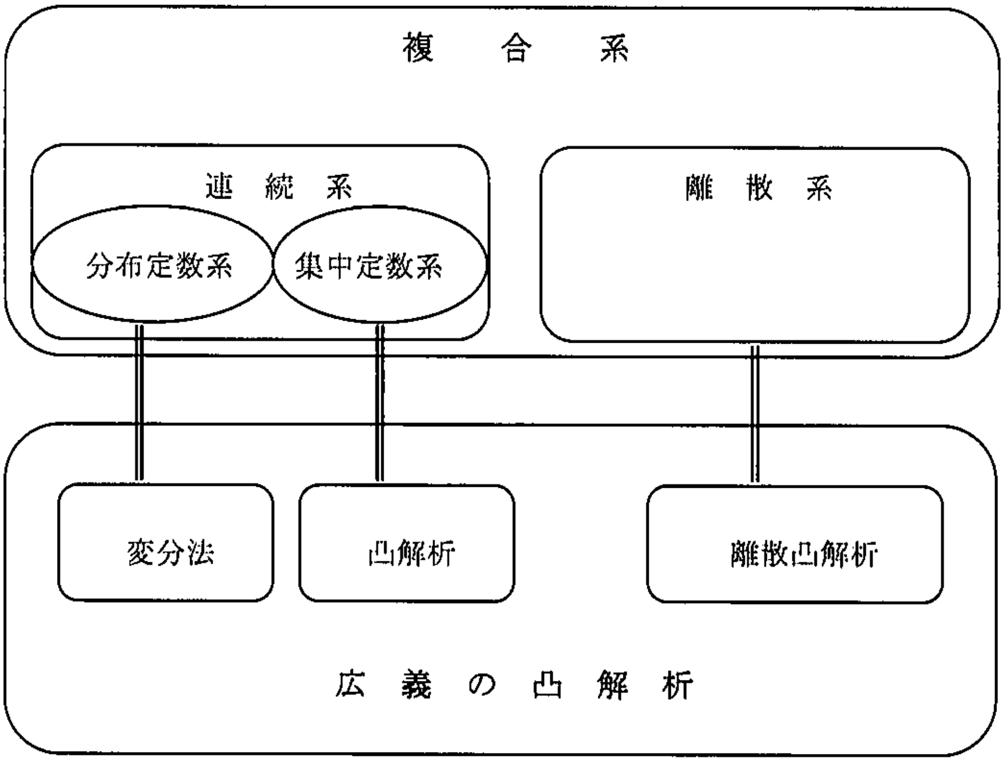
・競合関係にある独立なコンポーネントから成り，数理モデル全体の詳細が把握できないような分散的状況にあるシステムを対象とする最適化手法，

・分散的状況における最適化アルゴリズムの基礎として，凸解析，離散凸解析を含む広義の凸解析における手法（特に分離定理など利用法）．

２．研究実施内容（研究目的、方法、進捗状況、今後の予定などを記述）

（１）研究目的と方法

本研究においては「離散・連続複合系」を対象としている．現実の多くのシステムは，偏微分方程式で記述される現象（連続系）と事象生起による状態の変化（離散系）を含む複合システムであり，そのシミュレーションは，従来，必要に迫られる形で実行されてきた．本研究においては，離散凸解析の理論を手掛りとして，連続系と離散系の数学的取り扱いの統合を目指している．また，同じ連続系でも，分布定数系（無限自由度系）と集中定数系（有限自由度系）とで，従来の最適化アルゴリズムには不必要な乖離が見られた．これは，古典的変分法の成果の多くのものが，本来，凸解析との関連で理解され利用されるべきものであるにも拘わらず，従来の最適化の分野においてこのことが看過されてきた結果である．本研究は，凸解析の視点を積極的・意識的に用いることによって，分布定数系と集中定数系を包括する連続系，さらには，離散系をも包括する複合システムのシミュレーション技術の基礎を確立することを目指している．



（2） 進捗状況と成果

(a) 離散双対性に関わる最適化問題，とくに，M凸関数を目的関数に含む劣モジュラ流問題に対して，その解法とアルゴリズムについて理論的検討を行い，岩田・Fleischer・McCormickによる劣モジュラ流問題の解法を拡張する形で，M凸関数を含む問題に対する弱多項式時間解法を開発した．この解法は，理論的には現在，もっとも高速なアルゴリズムとなっており，その概要を2004年6月に国際会議(International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization)において報告するとともに国際学会誌に発表した(S. Iwata, S. Moriguchi and K. Murota: A capacity scaling algorithm for M-convex submodular flow, Mathematical Programming, 2005).

M凸劣モジュラ流問題とは，以下のように定義される最適化問題である．有向グラG=(V,A)を考える．各枝の流量の下限と上限および，単位流量あたりの費用が与えられているとする．容量の上下限制約を満たし，与えられた供給量と整合的なフローの中で総費用を最小にするものを求める問題を最小費用流問題という．最小費用流問題において，供給制約をフローの境界がある基多面体に属すべきであるという制約に置き換えることにより，劣モジュラ流問題に一般化される．劣モジュラ流問題はポテンシャル（双対変数）による最適性規準，負閉路による最適性規準，最適解の整数性，効率的なアルゴリズムの存在などの良い性質をもっており，扱いやすい組合せ最適化問題の代表となっている．さらに，フローの境界に対するコスト関数を目的関数に加えるという一般化を考えるとき，そのコスト関数がM凸関数ならば良い性質が保たれる．M凸関数を用いてこのように定義される問題をM凸劣モジュラ流問題と呼ぶ．

本研究で設計した新しいアルゴリズムの計算量は，ネットワークの点の個数を n，最大容量を L，最大費用を K，M凸コスト関数の関数値計算に要する時間を F とするとき，$O(F n^6 (\log L)^2 \log K)$ である．これは，一般のM凸劣モジュラ流問題に適用できるアルゴリズムであるが，一方で，M凸関数がスケーリングに関して閉じている場合のM凸劣モジュラ流問題に対して，既に開発されたアルゴリズムの計算量は，$O(F n^4 \log L)$ であり，適用可能な範囲が限定されている代わりに高速になっている．状況に応じて，両者を使い分けるのがよい．

M凸劣モジュラ流問題の解法アルゴリズムの現状と本研究の位置づけは次表の通りである．

	劣モジュラ流	M凸劣モジュラ流
負閉路消去法	藤重(1978)	室田(1999)
最短路繰返し法	藤重(1978)	森口・室田(2002)
容量スケーリング法	岩田(1997) Fleischer-Iwata-McCormick(2002)	森口・室田(2002) 本研究

(b) マルチモジュラ関数と，L 凸関数の関係を解明した．待ち行列や在庫管理などの離散事象システムの解析において，マルチモジュラ関数の概念が提案され，その有用性が議論されていることが文献調査の結果，明らかとなった．その議論と応用については，Altman, Gaujal, Hordijk によるモノグラフ（2003 年）に詳細が記述されている．この概念は一種の劣モジュラ性を定式化したものであり，その意味において，離散凸解析における L 凸関数に類似している．

本研究においては，マルチモジュラ関数とL凸関数の関係を理論的に調べ，両者が変数のユニモジュラ変換によって移り合う，等価な概念であることを明らかにした．その結果として，マルチモジュラ関数の文脈で得られた特徴付け定理はL凸関数に関する特徴付け定理へと翻訳される．また，逆に，L凸関数に関する局所最適性定理は，マルチモジュラ関数に関する局所最適性定理を与える．この考察の結果，Altmanらの文献に述べられていた最適性規準が誤りであることを指摘し，それを如何なる形に修正すべきかを示した論文を国際学会誌に発表した(K. Murota: Note on multimodularity and L-convexity, Mathematics of Operations Research, 2005)．

L凸関数と等価な概念は，様々な分野において独立に（しかし，部分的に）研究されて来たことが明らかになっているが，上記の研究を含め，今までの研究によって明らかになった等価な概念は表１の通りである．

表１．　L凸関数と等価な概念

L凸関数	Murota(1998)
L#凸関数	Fujishige – Murota(2000)
劣モジュラ整凸関数	Favati – Tardella(1990)
マルチモジュラ関数	Hajek(1985)

(c) M凸関数概念のジャンプシステム上の関数への一般化を行った．離散凸関数の重要な性質の一つとして，大域的な最適性が局所的な最適性によって特徴付けられるという性質がある．この性質は，最適化シミュレーションにおけるアルゴリズムの設計において利用できる便利な性質である．

2004年6月に開催された整数計画法と組合せ最適化に関する国際会議(International Conference on Integer Programming and Combinational Optimization)において，Apollonio と Sebo がグラフ因子に関する最適化問題を考察し，興味深い局所最適性規準を示した．

本研究においては，離散凸解析における中心的概念の一つであるM凸関数の概念を，ジャンプシステム上の関数にまで一般化することによって，Apollonioらの定理を離散凸解析の文脈に位置づけることに成功した．さらに，本研究による一般化の結果として，Apollonioらの考察した問題においてグラフの辺に重みが付与されている場合も取り扱えるようになった．

M凸関数に関連する概念の一般化の歴史は表２のように要約される．

表２．　M凸関数に関連する概念

マトロイド	Whitney (1935)
ポリマトロイド	Edmonds (1965)
一般化ポリマトロイド	Frank, Tardos (1985)
付値マトロイド	Dress - Wenzel (1990)
基多面体上のM凸関数	Murota (1996)
一般化ポリマトロイド上のM凸関数	Murota - Shioura (1999)
ジャンプシステム上のM凸関数	Murota (2004)　(本研究)

３．主な研究成果

(0)著書

- Kazuo Murota: Discrete Convex Analysis, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Vol.10, SIAM, 2003.

(1)論文発表

- Kazuo Murota and Akiyoshi Shioura: Conjugacy relationship between M-convex and L-convex functions in continuous variables, Mathematical Programming, Vol.101, No.3, 415-433, 2004.
- Kazuo Murota and Akihisa Tamura: Proximity theorems of discrete convex functions, Mathematical Programming, Vol.A99, No.3, 539-562, 2004.
- Kazuo Murota, Hiroo Saito and Robert Weismantel: Optimality criterion for a class of nonlinear integer programs, Operations Research Letters, Vol.32, 468-472, 2004.
- Kazuo Murota and Akiyoshi Shioura: Quadratic M-convex and L-convex functions, Advances in Applied Mathematics, Vol.33, No.2, 318-341, 2004.

・Hiroshi Hirai and Kazuo Murota: M-convex functions and tree metrics, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.21, No.3, 391-404, 2004.
・Satoru Iwata, Satoko Moriguchi and Kazuo Murota: A capacity scaling algorithm for M-convex submodular flow, Mathematical Programming, Vol.103, No.1, 181-202, 2005.
・Kazuo Murota: Note on multimodularity and L-convexity, Mathematics of Operations Research, Vol.30, No.3, 658-661, 2005.

(2)口頭発表

・Kazuo Murota(東京大学大学院情報理工学系研究科, PRESTO JST): Conjugacy relationship between M-convex and L-convex functions in continuous variables, 18th International Symposium on Mathematical Programming, Copenhagen, August 18-22, 2003.
・室田一雄（東京大学大学院情報理工学系研究科, PRESTO JST）：離散凸解析への誘い, 2004年度日本数学会年会, 企画特別講演, 筑波大学, 3月28日-3月31日, 総合講演・企画特別講演アブストラクト, 99-109, 2004.
・齊藤廣大（東京大学大学院情報理工学系研究科）, 室田一雄（東京大学大学院情報理工学系研究科）：ロバスト混合整数計画に対するBenders分解法, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2005年度春季研究発表会, 3月16日-17日, 236-237, 2005.
・Kazuo Murota(東京大学大学院情報理工学系研究科, PRESTO JST): M-convex functions on jump systems, Generalization of minsquare factor problem, The 4th Japanese-Hungarian Symposium On Discrete Mathematics and Its Applications, Budapest, June 3-6, 2005.