多体量子系としての量子計算機の分析
Analysis of quantum computers as many-body quantum systems

清水明
Akira Shimizu
東京大学大学院総合文化研究科
The University of Tokyo

概要: 量子計算機の物理的実態は、多体量子系と考えるのが自然である。従って、量子計算機におけるエンタングルメントは、量子情報理論で言うところの「多地点のエンタングルメント」になり、2地点の場合とは違って無数の種類がある。その中で、マクロに異なる状態たちの重ね合わせ(筆者は macroscopically entangled state と呼ぶ)が、量子計算機の(古典計算機に比べての)スピードアップに本質的な役割を演じていることを強く示唆する証拠を得た。また、多体量子系の macroscopic entanglement の物理を様々な観点から調べ、様々な系に応用した。さらに、そもそも「マクロに異なる状態たちの重ね合わせ」という概念自体が曖昧なものであったが、これについてもきちんとした定義を与え、その物理を明らかにした。

【研究のねらい】 量子計算機と古典計算機の性能の差が顕著に出るのは、大きなデータを扱うときであるから [1]、意味のある量子計算機には多くの量子状態が必要である。これを実現するための物理系は、原理的には多準位の１自由度系（たとえば１個の水素原子）でも構わないのだが、様々な要素を勘案すると、少数の準位を持つ系（たとえば２準位系＝キュービット）が空間的に広がって配置されている系を想定するのが自然である。つまり、量子計算機の物理的実態は、多体量子系と考えるのが自然である。

量子計算機にはエンタングルメントが現れるが、上記のような多体量子系のエンタングルメントは、量子情報理論で言うところの「多地点のエンタングルメント」になるので、「２地点のエンタングルメント」とは違って、無数の種類がある。では、どんな種類のエンタングルメントが、量子計算機の（古典計算機に比べての）スピードアップに本質的な役割を演じているのだろうか？

この基本的な問いかけに対して、筆者は次のような conjecture を発表した（正確な表現は補足Ａに記した）[2]：ある問題を古典計算機よりもずっと速く解くような量子計算機は、マクロに異なる状態たちの重ね合わせ（これを筆者は macroscopically entangled state と呼んでいる）を計算の途中に使うのではないか？そしてそれが量子計算機のスピードアップに本質的な役割を演じているのではないか？

本研究の目的は、この conjecture の真偽を調べて上記の基本的な問いかけに解答を与えることと、多体量子系の macroscopic entanglement の物理を明らかにすることにある。そもそも、「マクロに異なる状態たちの重ね合わせ」という概念自体が曖昧なものであったが、これについてもきちんとした定義を与え、その物理を調べる。

【研究方法】 多体量子系の「マクロに異なる状態たちの重ね合わせ」を最初に問題にしたのは、シュレディンガーであった [3]。それ以来このような状態は多くの人々の興味を引き、

今日までずっと研究が続いている。最初のうちは、現実の物理とは結びつきにくいような議論がなされることも少なくなかったが、1980 年前後から、A. J. Leggett の有名な Leggett program [4] のように、現実の物理の問題として論じられるようになってきた。しかしながら、「マクロに異なる状態たちの重ね合わせ」の定義からして曖昧なものであり、それを明確化しようとして Leggett が導入した disconnectivity という量も（Leggett 自身も述べているように）不定性の大きな曖昧な量になってしまっていた。また、「そのような状態はノイズにより極めて速く decohere するであろう」という予想をきちんと示そうという仕事も多くのグループ（例えばZurek ら）により試みられ、確かにそれを示したと主張されたが、実際には少数自由度系のモデルを採用したために、環境との相互作用のモデルを取り替えると答えが簡単に変わってしまうような有様だった（それでは何も示せていない）。

そこで筆者らは、本研究課題が採択される前に、まず次のような内容の一般論を構築した [5]：

(i) 多体量子系の純粋状態について、「マクロに異なる状態たちの重ね合わせ」を曖昧さなく定義し、そのような状態（「マクロにエンタングルした状態」と呼んだ）を p=2 として示す指標 p (1 ≦ p ≦ 2)を導入した。

(ii) p=1 の状態の decoherence rate は、決して異常に大きくなることがないことを、環境との相互作用のモデルの詳細に依らずに一般的に示した。

(iii) p=2 の状態の decoherence rate は、環境の性質に依存して、異常に大きくなることもあればそうでないこともある（マクロにエンタングルした状態は、ノイズに対して格別に不安定というわけでは、必ずしもない）！

(iv) しかし、p=2 の状態は、適当な局所的な測定に対しては不安定である（状態を大きく変えるような局所測定が常に存在する）！

これは一般論であるから、様々な多体量子系に応用できる。そこで、量子計算機への応用として、上述の conjecture を発表した。そして、この conjecture の真偽を調べる第一段階として、Shor の因数分解アルゴリズムにおいて確かにこの conjecture が真であることを確かめることができた [6]。

しかしながら、次のような多くの課題が残っていた：

1. 因数分解はいわゆる structured problem [1]であるが、unstructured problem を解くときにも conjecture は真なのか？

2. 文献[6]の段階では、一般の純粋状態について指標 p を計算する方法が見つかっていなかったために、手探りで調べて、計算ステップの中の２カ所について、マクロにエンタングルした状態が現れることを示しただけだった。他のステップではどうなっているのか？

3. p という指標は、純粋状態にしか使えない。一般の状態（混合状態）ではどのような指標を用いればよいのか？

4. マクロにエンタングルした状態を実験的に検出するには何を測ればよいのか？

5. 量子計算機以外の多体量子系には、マクロにエンタングルした状態は、いつどのようなときに現れるのか？

そこで本研究課題では、次のような方法でこれらの課題を克服していった。まず、一般の純粋状態について指標 p を計算する方法を開発した。大きな自由度の多体量子系にこの方法を適用するには大量のメモリーを積んだ高速の計算機が必要となるので、それを何台か購入し、数値計算を実行した。また、特殊な場合には手計算でも p が計算できる場合が

あるので、その場合は手計算を行った。これにより、１，２，５の研究を遂行することができた。また、様々なアイデアを試行錯誤し、時には数値計算の結果を参照することにより、遂に３，４も大きな成果が得られた。

【研究成果】 本研究課題で得られた成果とその相互の関連を図示したものを次ページに掲げる。この図を参照しながら以下を読んで頂ければ、判りやすいと思う。水色の部分が、上で説明した、本研究課題に採択される前までに得られていた研究成果である。そして、緑色の部分が、これから説明する、本研究課題で得られた成果である。

まず、一般の（実効的に並進対称な）純粋状態について指標 p を計算する方法を開発し、variance-covariance method (VCM)と名付けた [7]。そして、この方法をまず、強磁性体にマグノンがマクロに励起された状態に適用し、以下のことを示した [7]：

(i) 同じ濃度のマグノンを励起しても、どんな一体状態たちに励起するかで、p の値は大きく変わる。

(ii) ２地点エンタングルメントが最大なのにマクロエンタングルメントがない状態とか、２地点エンタングルメントが小さいのにマクロエンタングルメントがある状態が見つかった。つまり、エンタングルメントの大小は、どんな種類のエンタングルメントを見るかで全く異なる。

次に、多体の量子カオス系のエネルギー固有状態の p を計算した [8]。それまでは、量子カオス状態はエンタングルメントが大きくてノイズに対して脆弱であろうと想像されていたが、そうではないことが判った。即ち、２地点エンタングルメントは最大に近いがマクロエンタングルメントはなく、従って文献[5]の一般論（上記）から、ノイズに対して格別に脆弱ということはあり得ないことが判った。また、多地点相関についても多くのことが判った。

続いて、量子計算機の p を計算した [9]。structured problem の代表としては Shor の因数分解アルゴリズムを、unstructured problem の代表としては Grover の量子探索アルゴリズムを選んだ。その結果、どちらについても我々の conjecture が真であることが判った。また、両アルゴリズムについて、各ステップにおいてどんな物理量がマクロに揺らいでいるか（p=2 をもたらすか）を明らかにした。

さらに、（実効的に並進対称な）混合状態について、それがマクロにエンタングルしているか（マクロに異なる重ね合わせ状態を含んでいると言えるか）否かを判定する新しい指標 q を提案し、それがきわめて自然な指標になっていることを示した [10]。（定義するだけなら何でもいいわけだから、自然な指標になっていることが重要！）これにより、

(i) 量子計算機の解析に少しでも現実味を加味すると混合状態になってしまうが、それがマクロにエンタングルしているかどうかが判定できるようになった。

(ii) マクロにエンタングルした状態を実験的に検出するには何を測ればよいのかが明らかになった。

(iii) 純粋状態の指標 p は２局所点相関の総和だが、なぜ２局所点相関で全体のエンタングルメントについて強いことが言えたのかが明らかになった。つまり、q の方は多局所点相関であるから全体のエンタングルメントについて強いことが言えるが、実は、純粋状態に限れば p=2 が q=2 を意味することが判り、「純粋状態である」という情報があれば、２局所点相関から多局所点相関について強いことが言えたのであった。

Superposition of macroscopically distinct states, or **Macroscopic entanglement**
(Shroedinger 1935, Leggett 1980, ...)

Clear definition for **pure states** by index p (PRL 2000, PRL 2002)
・**Stabilities** against **noises**, and against **local measurements**

Conjecture: quantum computers should utilize macroscopically entangled states when they solve hard problems much faster than any classical algorithms.
(Talk presented at JST Symposium 2000)

Use of macroscopic entanglement in Shor's factoring algorithm (PRA 2004)

Macroscopic entanglement of **many-magnon states** (PRA 2005)

Correlations of observables in **chaotic macroscopic quantum systems** (JPSJ 2005)

Strong support of the conjecture (2005)
・Use of macroscopic entanglement in Grover's quantum search algorithm
・Full analysis of Grover's and Shor's algorithms

Clear definition for **mixed states** by index q (PRL 2005)
・Detection of macroscopic entanglement by correlation of local observables

Use of macroscopic entanglement in **one-way quantum computation** (2006)

Visualization of superposition of macroscopically distinct states (PRA 2006)

Generation of macroscopically entangled states **through the time evolution by short-range Hamilonians** (2006)

Quantum Zeno Effect for Exponentially Decaying Systems (PRL 2004)

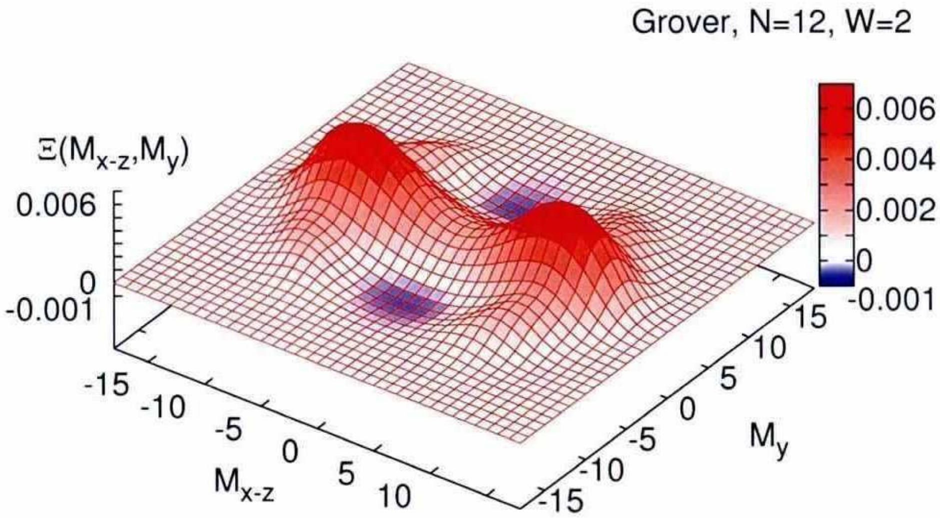
Review: Quantum Zeno Effect by General Measurements (Physics Reports 2005)

そして、この成果をすぐさま量子計算機に応用した。量子計算機の実装法として、one-way quantum computation という実装法が有力視されているが、その場合にもマクロにエンタングルした状態が現れるかどうかは、混合状態のマクロエンタングルメントを調べる必要があった。それは上記の q で調べられる！そうして調べて見たところ、やはりマクロにエンタングルした状態が、今度は混合状態として、現れることが判った [11]。

また、今までに述べたような系に現れる「マクロにエンタングルした状態」というのは、いわゆる「シュレディンガーの猫状態」のような単純な状態ではなく、非常に多くのマクロに異なる状態の重ね合わせになっていることが多い。それを判りやすく可視化する方法が望まれる。そこで、測定の解像度を落とせば非可換な物理量も同時確率分布を持つようになることに着眼し、可視化する方法を開発した [12]。それによって Grover の量子探索アルゴリズムの途中に現れる状態を可視化したものを下図に示す。

さらに、量子計算機ではなく、短距離相互作用しかもたない自然なハミルトニアンによる時間発展で、多項式時間でマクロにエンタングルした状態がつくれるかどうかを調べ、それが可能であることをい示した [13]。

また、量子情報理論においては測定理論が重要な役割を演じることが多いが、量子ゼノ効果という測定理論の典型的な舞台に、現代的な測定理論を適用し、従来の安易な測定理論の結論とは全く違う結論が得られることを示した [14]。これに関連する仕事は、Physics Reports 誌の invited review paper になった [15]。特に、この review paper の第４節は、量子ゼノ効果に限定しない、現代的な測定理論の review になっているので、これから現代的な測定理論を研究に使う人にとっても役立つのではないかと思う。



【今後の展開】 まもなくこの研究課題の研究期間は終了するが、以上の研究成果のうちで、まだ論文にしていない内容を、早急に論文にする必要がある。それが済んだら、もはやこの研究課題の研究期間の後になってしまうが、混合状態のマクロエンタングルメントについて、その安定性の研究や、量子計算機以外の系でどのような場合に現れるかなどを研究する必要がある。また、量子情報処理において、量子系の測定限界の研究が重要であることが近年明らかになってきたが、それについても、物理相互作用が限られていることからくる測定の原理的限界 [16] がどのような形で制限をもたらすかを明らかにしてゆきたい。

【結言】 本研究課題は、量子情報理論と、その他の分野（場の理論や低温物理など）を結びつける内容の研究である。量子計算機というひとつの対象を、量子情報理論の観点から見るだけではなく、様々な視点で見ることによって、また新しい物理が見えてきたように思う。若い研究者の中に、このような広角的な視点で研究される方々が増えることを願っている。

参考文献

[1] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, 2000).

[2] 清水明, 第4回量子効果等の物理現象シンポジウム (December 20-21, 2000, Tokyo) 口頭発表; 清水明, 第56回日本物理学会(2001) 28pYN-6.

[3] E. Schroedinger, Naturwissenschaften 23 (1935) 807, 823, 844.

[4] 高木伸「巨視的トンネル現象」(岩波書店)など。

[5] A. Shimizu and T. Miyadera, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 270403.

[6] A. Ukena and A. Shimizu, Phys. Rev. A 69, 022301 (2004).

[7] T. Morimae, A. Sugita and A. Shimizu, Phys. Rev. A 71 (2005) 032317.

[8] A. Sugita and A. Shimizu, J. Phys. Soc. Jpn. 74 (2005) 1883.

[9] A. Ukena and A. Shimizu, quant-ph/0505057.

[10] A. Shimizu and T. Morimae, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 090401.

[11] Y. Matsuzaki and A. Shimizu, in preparation.

[12] T. Morimae and A. Shimizu, Phys. Rev. A, in press.

[13] T. Morimae and A. Shimizu, in preparation.

[14] K. Koshino and A. Shimizu, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 030401.

[15] K. Koshino and A. Shimizu, Physics Reports 412 (2005) 191-275.

[16] A. Shimizu, Statistical Physics (eds. M. Tokuyama and H. E. Stanley, American Institute of Physics, 2000), 611-620.